

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Claude AUMASSON



Sujet de la thèse : PROCESSUS ALÉATOIRES A COMMANDE, ET APPLICATIONS A
L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE.

Soutenue le 28 avril 1972 devant la Commission d'Examen

MM. NEVEU

Président

PALLU DE LA BARRIÈRE

BARDOS

DACUNHA-CASTELLE

} Examineurs

Invité

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547103_0028

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Claude AUMASSON



Sujet de la thèse : PROCESSUS ALÉATOIRES A COMMANDE, ET APPLICATIONS A
L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE.

Soutenue le 28 avril 1972 devant la Commission d'Examen

MM. NEVEU

Président

PALLU DE LA BARRIÈRE

BARDOS

DACUNHA-CASTELLE

}
Examineurs

Invité

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1972



REMERCIEMENTS

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur Pallu de La Barrière, qui a bien voulu accepter de patronner ma thèse, qui m'a guidé dans mon travail, et dont les conseils judicieux et les encouragements bienveillants m'ont été extrêmement précieux.

Ma gratitude s'adresse aussi à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, et en particulier à son directeur scientifique central Monsieur l'Ingénieur Général Contensou et à Monsieur Bouttes, Chef du Département des Etudes de Synthèse, qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail, tout en laissant la plus grande liberté à l'orientation de mes recherches.

Je remercie très vivement Monsieur le professeur Neveu de m'avoir fait l'honneur de présider le jury, après avoir accepté, malgré ses nombreuses occupations, de lire mon manuscrit en tant que délégué de la Commission de Mathématiques. Je remercie également les autres membres du jury, Monsieur Dacunha-Castelle, autre délégué de la Commission de Mathématiques, dont les suggestions m'ont permis d'améliorer certains résultats, et Monsieur Bardos qui m'a proposé un très intéressant sujet de deuxième thèse et a su m'en faire découvrir les enseignements riches et variés. Mes remerciements vont aussi à Monsieur Lanery dont les critiques constructives m'ont beaucoup aidé dans l'élaboration d'une rédaction définitive.

Je n'oublierai pas non plus mes collègues de l'O.N.E.R.A., et notamment ceux du groupe de Monsieur Marec, qui m'ont fait mieux connaître certaines applications des théories auxquelles j'apporte cette contribution.

Merci enfin à ceux qui ont participé à l'édition de cette thèse et particulièrement à Madame Cavron qui l'a dactylographiée.

* * *

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
RÉSUMÉ	4
NOTATIONS	5
INTRODUCTION	9
Chapitre 1 - Variables aléatoires à commande	17
I. Variables aléatoires à commande	11
II. Commande adaptée à une observation	12
III. Probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à une variable aléatoire à commande et relativement à une probabilité de transition	13
III.1. Définition	13
III.2. Approximation d'une probabilité sur une sous-classe compacte	14
III.3. Construction d'une probabilité conditionnelle par rapport à une variable aléatoire	16
III.4. Théorème d'existence	20
III.5. Application aux probabilités conditionnelles régulières ordinaires	28
IV. Construction d'espérances et de probabilités conditionnelles liées à une variable aléatoire à commande adaptée à une observation	32
IV.1. Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire à commande bouclée réelle positive par rapport à une observation	32
IV.2. Probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire à commande bouclée et une observation	34
Chapitre 2 - Processus aléatoires à commande	37
I. Processus aléatoires à commande (en temps discret)	37
I.1. Définition	37
I.2. Premier exemple : processus aléatoire à commande défini par une équation d'évolution	37
I.3. Deuxième exemple : processus aléatoire à commande défini à partir d'un autre processus aléatoire à commande par une équation d'observation	38
II. Bouclage (ou feedback)	40
II.1. Commande bouclée	40
II.2. Commande adaptée à un processus aléatoire à commande	40
III. Suite régulière de probabilités conditionnelles associée à un processus aléatoire à commande	42
IV. Construction d'espérances ou de probabilités conditionnelles par rapport à un processus aléatoire à commande bouclée	45
V. Espérances et probabilités conditionnelles « universelles » pour une variable aléatoire à commande, relativement à un processus aléatoire à commande	51
V.1. Définition	51
V.2. Exemples : cas où il existe une suite régulière de probabilités conditionnelles	52
V.3. Construction d'espérances ou de probabilités conditionnelles universelles	57
VI. Processus de Markov à commande	57
VI.1. Définition	57
VI.2. Exemple : processus markovien à commande défini par une équation d'évolution à bruit sans mémoire (ou « blanc »)	59
VI.3. Bouclage markovien	61
VII. Autre modèle mathématique pour l'étude des systèmes stochastiques à commande	61

Chapitre 3 - Recherche d'un espace de probabilité canonique	64
I. Position du problème	64
II. Construction des espaces mesurables, applications mesurables et probabilités de transition de base	66
II,1. Espaces $(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_j)$ et $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$	66
II,2. Applications de « substitution » et d'« élimination »	66
II,3. Processus aléatoire à commande $\{X_i^j; i=0,1,\dots,j\}$	68
II,4. Probabilités de transition S^j et T^j	69
II,5. Probabilités P_j et probabilités de transition P_j^i	70
III. Propriétés des probabilités de transition de base	73
III,1. Propriétés de T_j^i	73
III,2. Propriétés de P_j^i	74
IV. Construction du processus aléatoire à commande cherché	83
IV,1. Horizon fini	83
IV,2. Horizon infini	83
Chapitre 4 - Utilisations de la formule de Bayes	87
I. Préliminaires	87
I,1. Introduction	87
I,2. Changement de variable dans les intégrales	87
II. Formule de Bayes	89
III. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à une variable aléatoire à commande, et applications	94
III,1. Principales hypothèses et notations	94
III,2. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à une variable aléatoire à commande	95
III,3. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire ordinaire	97
III,4. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire à commande adaptée à une observation	99
IV. Construction d'une suite régulière de probabilités conditionnelles associée à un processus aléatoire à commande, et applications	100
IV,1. Principales hypothèses et notations	100
IV,2. Construction des probabilités de transition de base	103
IV,3. Construction d'une suite régulière de probabilités conditionnelles	106
IV,4. Construction d'une probabilité conditionnelle universelle pour une variable aléatoire à commande	109
V. Cas des bruits sans mémoire (ou « blancs »)	111
VI. Cas d'un système défini par une équation d'évolution et une équation d'observation	115
VI,1. Cas général	115
VI,2. Cas des bruits sans mémoire	117
Chapitre 5 - Applications à l'optimisation stochastique	124
I. Optimisation ordinaire	124
I,1. Introduction	124
I,2. Politiques - Optimalité d'une politique (en horizon fini)	124
I,3. Coût partiel associé à une politique - Politiques partielles	127
I,4. Programmation dynamique stochastique	130
II. Optimisation à deux joueurs	136
II,1. Jeux séquentiels (en horizon fini) - Politiques de « poursuite » et d'« évasion »	136
II,2. Politiques partielles de poursuite et d'évasion	139
II,3. Programmation dynamique stochastique	142

III. Optimisation avec processus de coût à valeurs positives ou négatives	146
III,1. Position du problème	146
III,2. Politiques admissibles - Coût partiel	147
III,3. Admissibilité et optimalité d'une politique de poursuite	153
III,4. Politiques partielles admissibles	155
III,5. Programmation dynamique stochastique	161
IV. Optimisation des « systèmes markoviens »	168
Chapitre 6 - Exemples classiques	177
I. Exemple de processus aléatoire à commande : processus de Kalman	177
I,1. Définition des processus de Kalman	177
I,2. Notations	178
II. Exemple de calcul de probabilités conditionnelles universelles : équations de Kalman	180
II,1. Introduction	180
II,2. Calcul d'une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus d'observation de Kalman	181
II,3. Calcul de probabilités conditionnelles universelles	186
II,4. Equations de Kalman	187
III. Exemple de jeu séquentiel stochastique : processus de Kalman avec coût quadratique	192
III,1. Introduction	192
III,2. Calcul d'une politique de poursuite optimale	192
IV. Exemple de processus aléatoire à commande markovien : chaîne de Markov discrète à commande	203
IV,1. Introduction	203
IV,2. Construction d'une chaîne de Markov discrète à commande	203
IV,3. Optimisation d'un système markovien discret (en horizon fini)	205
CONCLUSION	207
ANNEXE : Rappels et compléments de Théorie des Probabilités	208
I. Espaces de mesure. Applications mesurables et intégrables	208
II. Classe σ -additive de sous ensembles	210
III. Probabilité de transition	212
IV. Dérivée de Radon-Nicodym	216
V. Probabilité conditionnelle régulière	217
RÉFÉRENCES	221
SOMMAIRE	223
ABSTRACT	225

NUMÉROTATION DES FORMULES ET THÉORÈMES

Le numéro d'une formule est précédé du numéro du paragraphe dans lequel elle apparaît en premier (indépendamment du numéro d'alinéa).

Le numéro d'un théorème (ou lemme ou corollaire) est précédé du numéro du paragraphe et éventuellement du numéro d'alinéa dans lequel il est énoncé.

Lorsque l'on cite une formule ou un théorème d'un autre chapitre, celui-ci est toujours précisé explicitement.

PROCESSUS ALÉATOIRES A COMMANDE, ET APPLICATIONS A L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE

par Claude AUMASSON

RÉSUMÉ (*voir sommaire plus détaillé page 223*)

Cette publication présente l'analyse d'un modèle mathématique général pour les systèmes de commande stochastiques à temps discret. On s'intéresse plus particulièrement aux effets probabilistes du bouclage et à l'existence et la construction de probabilités conditionnelles régulières. Les résultats obtenus permettent notamment une nouvelle interprétation des systèmes définis par des probabilités de transition. Ils sont utilisés pour trouver, par programmation dynamique, des conditions suffisantes d'optimalité pour des problèmes de jeux stochastiques avec observation commune aux deux joueurs. On vérifie enfin sur deux exemples simples (systèmes linéaires gaussiens à coût quadratique et systèmes markoviens discrets) que la théorie générale permet de retrouver et d'améliorer des résultats connus.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Processus stochastique - Théorie décisions - Théorie jeu - Analyse statistique - Recherche opérationnelle - Probabilité - Commandes optimales - Etudes systèmes - Programmation dynamique.



RANDOM PROCESSES WITH CONTROL, AND APPLICATIONS TO STOCHASTIC OPTIMIZATION

SUMMARY (*see longer abstract page 225*)

This paper presents the analysis of a general mathematical model for stochastic, discrete time control systems. It insists particularly on the probabilistic effects of the feedback process and on the existence and construction of regular conditional probabilities. The results obtained lead, in particular, to a new interpretation of the systems defined by transition probabilities. They are used to find out, by dynamic programming, sufficient optimality conditions for stochastic game problems with observation common to both players. Lastly it is verified, on two simple examples (linear, Gaussian, quadratic cost systems and discrete Markovian systems), that the general theory permits to find anew and to improve known results.

Descriptors (NASA thesaurus) : Stochastic processes - Markov processes - Markov chains - Random processes - Decision theory - Game theory - Statistical analysis - Operations research - Probability theory - Statistical decision theory - Feedback control - Optimal control - Servocontrol - Systems engineering - Dynamic programming

PRINCIPALES NOTATIONS

Chaque chapitre a ses notations propres, dont la signification est rappelée chaque fois qu'il nous l'a semblé nécessaire. Néanmoins, pour aider le lecteur, nous croyons utile de donner ci-dessous la signification la plus courante des principales d'entre elles.

k, i, j	: entiers positifs (temps discret)
N	: entier positif (instant final)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$	} : espaces de probabilité
ω, ω_k	
$\mathcal{F}_0$	: base dénombrable de $\mathcal{F}$
$\mathcal{H}$	: sous-classe compacte de $\mathcal{F}$
$\mathcal{H}$	: algèbre dénombrable engendrant $\mathcal{F}$
$\mathcal{C}$	: sous-classe compacte de $\mathcal{H}$
$\mathcal{G}$	: sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$
$(X, \mathcal{X})$	: espace mesurable (espace d'état)
x, x_k	: éléments de X
$(U, \mathcal{U})$	: espace mesurable (espace de commande)
u, u_k	: éléments de U
$(Y, \mathcal{Y})$	: espace mesurable (espace d'observation)
y, y_k	: éléments de Y
$(V, \mathcal{V})$ $(V_k, \mathcal{V}_k)$	} : espaces mesurables (espaces de bruit d'évolution)
v, v_k	
$(W, \mathcal{W})$ $(W_k, \mathcal{W}_k)$	} : espaces mesurables (espaces de bruit d'observation)
w, w_k	
Y	: variable aléatoire à valeurs dans $(Y, \mathcal{Y})$
X	: variable aléatoire à commande à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$
L	: variable aléatoire à commande à valeurs réelles positives
α	: application mesurable de $(Y, \mathcal{Y})$ dans $(U, \mathcal{U})$ (fonction de commande)
$\bar{X}$ $\bar{L}$	} : variable aléatoire associée à X à commande adaptée à Y .
P°	
M	: probabilité de transition de $(Y, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ (probabilité conditionnelle régulière par rapport à Y)
M	: fonction positive mesurable sur $(Y, \mathcal{Y}) \times (U, \mathcal{U})$ $(M(Y, \alpha(Y)))$: espérance conditionnelle de $\bar{L}$ par rapport à Y
P'	: probabilité de transition de $(Y, \mathcal{Y}) \times (X, \mathcal{X}) \times (U, \mathcal{U})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ (probabilité conditionnelle régulière « généralisée » par rapport à X et relativement à P°)

- $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$: processus aléatoire à commande à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (processus d'état)
 $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$: processus aléatoire à commande à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ (processus d'observation)
 $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots)$: processus aléatoire à commande à valeurs réelles (processus de coût)
 $(V_0, V_1, \dots, V_k, \dots)$: processus aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ (bruit d'évolution)
 $(W_0, W_1, \dots, W_k, \dots)$: processus aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ (bruit d'observation)
 f_k : application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{V}, \mathcal{V})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (fonction d'évolution)
 h_k : application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{W}, \mathcal{W})$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ (fonction d'observation)
 d_k : fonction réelle mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ (fonction de coût)
 α_k : application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^k$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k$ dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ (fonction de commande)
 β_k : application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ (fonction de commande markovienne)
 $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$: processus aléatoire associé à $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ (à commande bouclée ou adaptée à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$)
 $(\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k, \dots)$: processus aléatoire associé à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$ (à commande bouclée)
 $(\bar{L}_0, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_k, \dots)$: processus aléatoire associé à $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots)$ (à commande adaptée à $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ ou à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$)
 P^k : probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$
 $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$: suite «régulière» de probabilité conditionnelles associées à $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ ou $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$
 M_k : fonction réelle mesurable sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ (espérance conditionnelle «universelle» pour L_k par rapport à $(X_0, X_1, \dots, X_{k-1})$ ou $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$)
 Q^k ou Q_{k+1}^k : probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (probabilité conditionnelle «universelle» pour X_{k+1} par rapport à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ ou $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$)
 R^k ou R_{k+1}^k : probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ (probabilité conditionnelle «universelle» pour Y_{k+1} par rapport à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$)
 $(X_0^k, X_1^k, \dots, X_j^k, \dots)$: processus aléatoire à commande défini sur $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$
 S_j^i : probabilité de transition de $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ dans $(\mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1})$
 T_k^j : probabilité de transition de $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ dans $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$
 P_k^j : probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ ou $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ dans $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$
 T^j : probabilité de transition de $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$
 λ
 μ
 ν } : mesures positives σ -finies sur $\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \\ (\mathcal{V}, \mathcal{V}) \\ (\mathcal{W}, \mathcal{W}) \end{array} \right.$
 $W_k^{\otimes}$
 W_k^* } : inverses «partielles» de $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k \\ h_k \end{array} \right.$ considérées comme fonctions de W_k
 P_k : fonction positive mesurable sur $(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^{k+1}$ (densité de probabilité pour P_k)
 P_k^j : fonction positive mesurable sur $(\mathcal{V}, \mathcal{V})^{j+1} \times (\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^{k-j} \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ (densité de probabilité pour P_k^j)

$\left. \begin{matrix} \ell_k \\ \ell_k' \\ \ell_k'' \end{matrix} \right\} : \text{densités de probabilité pour les lois de } \left\{ \begin{matrix} (V_k, W_k) \\ V_k \\ W_k \end{matrix} \right.$

(U_1, U_1) : espace mesurable (espace de commande «de poursuite»)

u^1, u_k^1 : éléments de U_1

(U_2, U_2) : espace mesurable (espace de commande «d'évasion»)

u^2, u_k^2 : éléments de U_2

γ_k : application mesurable de $(Y, Y)^k \times (U, U)^{k-1}$ dans (U, U) (tactique à l'instant k)

γ_k^1 : application mesurable de $(Y, Y)^k \times (U, U)^{k-1}$ dans (U_1, U_1) (tactique de poursuite)

γ_k^2 : application mesurable de $(Y, Y)^k \times (U, U)^{k-1}$ dans (U_2, U_2) (tactique d'évasion)

χ_k^2 : application mesurable de $(Y, Y)^k \times (U, U)^{k-1} \times (U_1, U_1)$ dans (U_2, U_2)

β_k^1 : application mesurable de (X, X) dans (U_1, U_1) (tactique de poursuite markovienne)

β_k^2 : application mesurable de (X, X) dans (U_2, U_2) (tactique d'évasion markovienne)

θ_k^2 : application mesurable de $(X, X) \times (U_1, U_1)$ dans (U_2, U_2)

$\overline{Y}_k$: plus petite σ -algèbre rendant mesurables $\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k$

$J_0(y_1, y_2, \dots, y_N)$: indice de coût (ou coût total) associé à la politique $(y_1, y_2, \dots, y_N)$

$J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$: (représentant du) coût partiel à l'instant k associé à la politique $(y_1, y_2, \dots, y_N)$

$^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$: «partie supérieure» du (représentant du) coût partiel à l'instant k .

$^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$: «partie inférieure» du (représentant du) coût partiel à l'instant k .

$^*N_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$: ensemble où $^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$ est infini

$^*N_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$: ensemble où $^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$ est infini

$C_k, ^*C_k, {}^*C_k$: fonctions réelles mesurables sur $(Y, Y)^k \times (U, U)^k$ (fonctions «de Bellman», permettant le calcul de $J_k, ^*J_k, {}^*J_k$)

$\Gamma_k, ^*\Gamma_k, {}^*\Gamma_k$: fonctions réelles mesurables sur $(X, X) \times (U, U)$ (fonctions de Bellman «markoviennes»).

*
 * *

Par ailleurs, nous employons les symboles suivants :

A^c	: complémentaire de l'ensemble A
1_A	: fonction indicatrice de l'ensemble A (égale à 1 sur A et 0 sur A^c)
$X \longrightarrow Y$	: application de l'espace X dans l'espace Y
$x \rightsquigarrow y$	: application qui, au point x , fait correspondre le point y
$(X, \mathcal{X}) \rightsquigarrow (Y, \mathcal{Y})$	: probabilité de transition de l'espace mesurable $(X, \mathcal{X})$ dans l'espace mesurable $(Y, \mathcal{Y})$
X^+, X^-	: partie positive, négative de la variable aléatoire réelle X
$\stackrel{p.s.}{=}, \stackrel{p.s.}{\leq}$	: égalité, inégalité presque sûre (i.e. sauf sur un ensemble de probabilité nulle)
$E\{X\}$	: espérance (mathématique) de la variable aléatoire X
$E\{X/Y\}$	: espérance conditionnelle de la variable aléatoire X par rapport à la variable aléatoire Y , ou la σ -algèbre $\mathcal{G}$.
ou $E\{X/\mathcal{G}\}$	
$\sigma\{X\}$	: plus petite σ -algèbre rendant X mesurable
$\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$	: plus petite σ -algèbre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$	: produit des σ -algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$
$\mathcal{L}(X, Y)$	: espace vectoriel des applications linéaires (continues) de X dans Y
$\det M$	: déterminant de M
$\text{tra } M$	: trace de M

*

INTRODUCTION

Classiquement, on décrit les systèmes stochastiques à commande au moyen de différents processus aléatoires, à temps discret ou à temps continu : processus des états, des observations, des commandes, des coûts. En général, l'évolution de l'état en fonction du temps est définie par une équation d'évolution, où figure la commande, et l'évolution de l'observation par une équation d'observation, où figure l'état et parfois aussi la commande. Ces équations sont, dans le cas du temps discret, des équations de récurrence, dans le cas du temps continu, des équations différentielles, comportant des termes aléatoires, appelés bruits. Quant à la commande, elle est choisie à chaque instant en fonction des observations passées. Le coût, enfin, est une fonction réelle de l'état, de la commande et parfois de l'observation, et permet de définir, en prenant l'espérance mathématique de sa somme ou de son intégrale depuis l'instant initial jusqu'à l'instant final, un indice de coût, à l'aide duquel on peut se poser le problème du choix optimal de la commande. Le critère d'optimalité peut être la minimisation (ou la maximisation) de cet indice de coût, ou encore, dans le cas des jeux, la minimisation de l'indice de coût maximal réalisable par l'adversaire (ou l'inverse).

L'influence du choix de la commande sur les propriétés probabilistes de l'état et de l'observation, et par suite sur l'indice de coût, est assez difficile à analyser mathématiquement, même si, comme le font presque tous les auteurs, on suppose que les bruits sont « blancs » (notion d'ailleurs assez délicate à manier en temps continu). En fait, la plupart des études concerne l'un des deux cas particuliers suivants :

- ou bien l'observation et l'état coïncident (le système est alors dit exactement observé) ; dans ce cas on se limite souvent aux commandes ne dépendant que du dernier état connu, de sorte que le processus d'état soit toujours markovien (voir **Florentin** [12], **Wonham** [28, 29, 30] et **Kushner** [19] chap. 4) ;
- ou bien les équations d'évolution et d'observation sont linéaires ; dans ce cas on suppose souvent les bruits gaussiens, de façon à pouvoir utiliser les équations du « filtre » de **Kalman** [17], et se ramener au cas précédent en remplaçant l'état par son espérance conditionnelle par rapport aux observations passées (voir **Florentin** [13] et encore **Wonham** [28, 29, 30] et **Kushner** [19] chap. 4).

On peut évidemment se demander s'il n'est pas possible d'obtenir des résultats généraux sans avoir recours à ces hypothèses, très particulières, sur les propriétés stochastiques des bruits et la forme des équations. En temps discret, une réponse à cette question est fournie, dans une large mesure, par notre exposé, dont nous analysons maintenant le plan brièvement.

Au chapitre 1 sont introduites et étudiées les notions de variable aléatoire à commande, de commande bouclée et de probabilité conditionnelle régulière généralisée.

Au chapitre 2 nous généralisons aux systèmes évolutifs : nous définissons la notion de processus aléatoire à commande, qui permet de décrire aussi bien l'état, l'observation ou le coût du modèle classique avec équations d'évolution et d'observation ; nous montrons un théorème d'existence pour des « suites régulières » de probabilités conditionnelles (voir aussi **Aumasson** [2]) d'où l'on déduit des probabilités conditionnelles « universelles », permettant d'obtenir, pour tout bouclage, une probabilité conditionnelle régulière par rapport aux observations passées.

Au chapitre 3 nous vérifions que le formalisme des processus aléatoires à commande est même applicable à certains systèmes stochastiques à commande, comme les chaînes de Markov discrètes à commande (voir **Howard** [16] et **Pallu de la Barrière** [24] chap. 16) dont l'évolution de l'état n'est pas définie par une équation, mais par des probabilités de transition paramétrées par la commande.

Au chapitre 4 nous proposons une méthode de construction effective pour des probabilités conditionnelles universelles. Cette méthode nécessite évidemment des hypothèses beaucoup plus strictes que le théorème d'existence et s'apparente davantage aux méthodes classiques (voir par exemple **Aoki** [1] chap. V ou **Striebel** [26]).

Au chapitre 5 nous utilisons les probabilités conditionnelles universelles pour montrer que la méthode d'optimisation de la programmation dynamique, initialement développée pour les systèmes déterministes (voir **Bellman** [3] ou **Bellman-Dreyfus** [4]), peut être étendue au cas stochastique dans un cadre très général.

Enfin, **au chapitre 6** nous illustrons la théorie précédente sur deux exemples classiques.

Les chapitres 1 et 2 constituent les chapitres de base et sont nécessaires à la compréhension des chapitres ultérieurs. Par contre, les chapitres 3, 4 et 5 peuvent être lus indépendamment les uns des autres.

A l'intention des lecteurs éventuellement peu familiers de la Théorie de la Mesure, mais malgré tout intéressés par les applications de nos résultats à l'Automatisme, des définitions et théorèmes classiques abondamment utilisés dans notre exposé sont rappelés brièvement en Annexe.



Chapitre I

VARIABLES ALÉATOIRES A COMMANDE

I - VARIABLES ALÉATOIRES A COMMANDE

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable, appelé espace d'état, $(U, \mathcal{U})$ un espace mesurable, appelé espace de commande (ou de contrôle).

Une *variable aléatoire à commande*, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(U, \mathcal{U})$, sera par définition une application mesurable :

$$X : (\omega, u) \longmapsto X(\omega, u)$$

de l'espace produit $(\Omega \times U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U})$ dans $(X, \mathcal{X})$.

Nous avons adopté l'appellation : « variable aléatoire à commande » parce que nous avons en vue des applications à l'Automatisme. On peut remarquer toutefois que, si U est par exemple un intervalle $[0, T]$ de la droite réelle, muni de sa σ -algèbre de Borel $\mathcal{U}$, la variable aléatoire à commande X n'est autre qu'un processus aléatoire *mesurable* défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et d'espace des temps $(U, \mathcal{U})$ (cf. Meyer [21], IV.2, p. 79 et IV.55, p. 99).

Il sera commode par la suite de désigner par *variable aléatoire à k commandes* (à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(U, \mathcal{U})$) une application mesurable :

$$X_k : (\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) \longmapsto X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

de $(\Omega \times U^k, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^k)$ dans $(X, \mathcal{X})$, bien qu'il ne s'agisse en fait que d'une variable aléatoire à commande au sens précédent, mais avec pour espace de commande $(U^k, \mathcal{U}^k)$.



II - COMMANDE ADAPTÉE A UNE OBSERVATION

Soit X une variable aléatoire à commande définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Soit Y une variable aléatoire (ordinaire), appelée *observation*, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, appelé espace d'observation.

On peut associer à X une variable aléatoire *ordinaire* $\bar{X}$ en procédant comme suit.

On choisit une application mesurable, appelée *fonction de commande* :

$$\alpha : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

et on compose les applications mesurables :

$$\omega \in (\Omega, \mathcal{F}) \rightsquigarrow [\omega, \alpha(Y(\omega))] \in (\Omega \times \mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U})$$

$$\text{et : } (\omega, u) \in (\Omega \times \mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}) \rightsquigarrow X(\omega, u) \in (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

L'application $\bar{X}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ ainsi définie par :

$$\bar{X}(\cdot) = X \{ \cdot, \alpha[Y(\cdot)] \}$$

est bien une variable aléatoire ordinaire. Elle dépend évidemment de l'application α choisie, qu'on peut d'ailleurs éventuellement préciser en adoptant la notation plus explicite $\bar{X}^{(\alpha)}$.

Cette variable aléatoire ordinaire $\bar{X}$ (ou $\bar{X}^{(\alpha)}$) sera appelée variable aléatoire à commande *adaptée à l'observation* Y au moyen de la fonction de commande α , ou simplement, si aucune confusion n'est à craindre, variable aléatoire à commande *bouclée*.

La construction précédente peut en effet s'interpréter comme le «bouclage» ou «feedback» des automaticiens, qui consiste à choisir la commande (ou entrée) u en fonction d'une observation (ou sortie) Y .

Dans le cas particulier, déjà mentionné au paragraphe I, où $\mathcal{U}$ est un intervalle $[0, T]$ de $\mathbb{R}$ et où, par conséquent, X est un processus aléatoire mesurable, la substitution du paramètre u par la variable aléatoire :

$$\omega \rightsquigarrow \alpha[Y(\omega)], \text{ est aussi couramment pratiquée par les probabilistes, notamment si } \alpha[Y(\cdot)] \text{ est un temps d'arrêt (cf. Meyer, [21], IV.48, p. 101).}$$

On étudiera essentiellement dans ce chapitre la façon dont dépendent de la fonction de commande α des espérance conditionnelles du type :

$$(II.1) \quad E \left\{ \varphi[\bar{X}^{(\alpha)}] / Y \right\}$$

où φ est une fonction réelle positive mesurable sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, ou encore :

$$(II.2) \quad E \left\{ Z / (Y, \bar{X}^{(\alpha)}) \right\}$$

où Z est une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour employer là encore un terme d'automaticien, le calcul de l'expression (II.1) (respectivement de l'expression (II.2)), constitue un problème de *filtrage* par rapport à l'observation Y (respectivement $(Y, \bar{X})$).

On montrera au paragr. IV que, pour savoir calculer un représentant de (II.1) ou (II.2) quelle que soit la fonction de commande α , il suffit de connaître un représentant «suffisamment régulier» de (II.1) ou (II.2) pour les *fonctions de commande constantes* seulement (les automaticiens diraient : «pour les bouclages ouverts»).

Auparavant, au paragr. III, on montrera des théorèmes d'existence pour ces «représentants suffisamment réguliers».



III - PROBABILITÉ CONDITIONNELLE RÉGULIÈRE GÉNÉRALISÉE PAR RAPPORT A UNE VARIABLE ALÉATOIRE A COMMANDE ET RELATIVEMENT A UNE PROBABILITÉ DE TRANSITION

III.1. Définition

Le but du présent paragraphe est de définir et d'étudier une extension de la notion de probabilité conditionnelle régulière (rappelée en annexe, paragraphe V) au cas des variables aléatoires à commande.

Considérons donc un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et trois espaces mesurables $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Soient :

1 - P° une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$. (la définition et les propriétés des probabilités de transition sont rappelées en annexe, paragraphe III).

En pratique, il pourra s'agir d'une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et qu'on regardera comme une observation antérieure.

2 - X une variable aléatoire à commande définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et d'espace d'état $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

On dira qu'une probabilité de transition P^1 de $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ est une *probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à la variable aléatoire à commande X et relativement à la probabilité de transition P°* si et seulement si, quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{U}$ et $F \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{X}$ on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, u)] 1_F(\omega) P^\circ(y; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, u)] P^1[y, X(\omega, u), u; F] P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

Cela signifie en particulier que, pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $u \in \mathcal{U}$ fixés, $P^1[y, \cdot, u; \cdot]$ constitue une *probabilité conditionnelle régulière ordinaire* par rapport à la variable aléatoire ordinaire

$X(\cdot, u)$ définie sur l'espace de probabilité : $\{\Omega, \mathcal{F}, P^\circ(y; \cdot)\}$ constitué de l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni de la probabilité $P^\circ(y; \cdot)$.

On remarquera que cette dernière condition est nécessaire mais non suffisante : si pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $u \in \mathcal{U}$ fixés $\tilde{P}^1[y, \cdot, u; \cdot]$ constitue une probabilité conditionnelle régulière ordinaire par rapport à $X(\cdot, u)$ définie sur l'espace de probabilité $\{\Omega, \mathcal{F}, P^\circ(y; \cdot)\}$, cela n'implique pas que $\tilde{P}^1$ soit une probabilité conditionnelle régulière généralisée au sens qu'on vient de définir, car la mesurabilité pour tout $F \in \mathcal{F}$ de la fonction $\tilde{P}^1[\cdot; F]$ ainsi définie sur l'espace produit $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$ n'est pas du tout prouvée.

La définition qu'on a donnée ne prendra donc son intérêt qu'une fois montré un théorème d'existence spécifique (qui sera d'ailleurs valable à plus forte raison pour des variables aléatoires ordinaires). Ce théorème est énoncé à l'alinéa III.4.

L'alinéa III.2 a pour but de montrer la généralité des hypothèses adoptées dans ce théorème.

L'alinéa III.3 sert d'introduction à sa démonstration.

III,2. Approximation d'une probabilité sur une sous classe compacte

Rappelons qu'on appelle *classe compacte* (ou encore : pavage semi-compact) sur un ensemble Ω , une famille $\mathcal{C}$ de parties de Ω telle que, de toute sous-famille dénombrable de $\mathcal{C}$ d'intersection vide, on puisse extraire une sous-famille finie d'intersection vide (cf. Neveu [23], I.6, p. 26 ou Meyer [21], III.3, p. 55).

Si Ω est un espace topologique, toute famille de compacts est une classe compacte (en effet, dans un compact, toute famille de fermés d'intersection vide a une sous-famille finie d'intersection vide).

LEMME III.2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On suppose qu'il existe :

- 1 - une classe dénombrable $\mathcal{F}_0$ engendrant la σ -algèbre $\mathcal{F}$
- 2 - une sous-classe compacte de $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, telle que, pour tout $F \in \mathcal{F}$

$$P(F) = \sup \{ P(K) ; K \subset F, K \in \mathcal{K} \}$$

(P est « régulière » relativement à $\mathcal{K}$. cf. Meyer [21], III.28, p. 74).

On peut alors construire une algèbre dénombrable $\mathcal{H}$ et une sous-classe compacte $\mathcal{C}$ de cette algèbre telle que,

- 1 - l'algèbre $\mathcal{H}$ engendre la σ -algèbre $\mathcal{F}$
- 2 - à tout élément H de $\mathcal{H}$, on peut associer une suite croissante : $C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots$ d'éléments de $\mathcal{C}$ contenus dans H telle que :

$$P(H) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m)$$

REMARQUE III,2.1.

Si Ω est un espace métrisable complet muni d'un ensemble dénombrable partout dense (c'est-à-dire un espace polonais), les hypothèses du lemme sont réunies pour toute probabilité P définie sur la σ -algèbre de Borel $\mathcal{F}$. Il suffit de prendre pour $\mathcal{F}_0$ une base dénombrable d'ouverts et pour $\mathcal{K}$ la classe des compacts. (voir par exemple Neveu [23], p. 61, proposition II,7.3).

DÉMONSTRATION DU LEMME III,2

Par hypothèse, à tout élément $F \in \mathcal{F}$ et tout entier $m \geq 1$ on peut faire correspondre un élément $K \in \mathcal{K}$ tel que :

- 1 - $K \subset F$
- 2 - $P(F) - P(K) \leq \frac{1}{m}$

En désignant cet ensemble K par $K_m(F)$ on définit une suite $K_1(\cdot), K_2(\cdot), \dots, K_m(\cdot), \dots$ d'applications de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{K}$ telle que, quels que soient $F \in \mathcal{F}$ et l'entier $m \geq 1$:

- 1 - $K_m(F) \subset F$
- 2 - $P(F) - P[K_m(F)] \leq \frac{1}{m}$

Si $F \in \mathcal{K}$ on conviendra de prendre $K_m(F) = F$ quel que soit m .

Posons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0 \cup \{\emptyset\} \\ \mathcal{H}_0 = \{ H_0 : H_0 \in \mathcal{G}_0 \} \cup \{ H_0 : H_0^c \in \mathcal{G}_0 \} \\ \mathcal{C}_0 = \{ K_m(H_0) ; H_0 \in \mathcal{H}_0, m = 1, 2, 3, \dots \} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{H}_1 = \{ H_1 : H_1 \in \mathcal{G}_1 \} \cup \{ H_1 : H_1^c \in \mathcal{G}_1 \} \\ \mathcal{C}_1 = \{ K_m(H_1) ; H_1 \in \mathcal{H}_1, m = 1, 2, 3, \dots \} \end{array} \right.$$

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n-1} \cup \mathcal{C}_{n-1} \\ \mathcal{H}_n = \{ H_n : H_n \in \mathcal{G}_n \} \cup \{ H_n : H_n^c \in \mathcal{G}_n \} \\ \mathcal{C}_n = \{ K_m(H_n) ; H_n \in \mathcal{H}_n, m = 1, 2, 3, \dots \} \end{array} \right.$$

.....

Les classes ainsi construites ont les propriétés évidentes :

- 1 - $\mathcal{H}_n$ est dénombrable (comme on le constate immédiatement en raisonnant par récurrence)
- 2 - $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{F}$
- 3 - $\mathcal{H}_n$ est stable par complémentation et contient les ensembles $\emptyset$ et Ω
- 4 - $\mathcal{C}_n \subset (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_{n+1})$
- 5 - pour tout entier $m \geq 1$: $K_m(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{C}_n$

Par suite, les classes :

$$\mathcal{H}'' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$$\mathcal{C}'' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

ont les propriétés suivantes :

- 1 - $\mathcal{H}''$ est dénombrable
- 2 - $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}'' \subset \mathcal{F}$
- 3 - $\mathcal{H}''$ est stable par complémentation et contient $\emptyset$ et Ω
- 4 - $\mathcal{C}'' \subset (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'')$; $\mathcal{C}''$ est donc une classe compacte dénombrable
- 5 - pour tout entier $m \geq 1$: $K_m(\mathcal{H}'') \subset \mathcal{C}''$; autrement dit, quels que soient $\varepsilon > 0$
 $H \in \mathcal{H}''$ il existe $C \in \mathcal{C}''$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} C \subset H \\ P(H) - P(C) \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Considérons successivement la classe $\mathcal{H}'$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{H}''$ et la classe $\mathcal{C}'$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{C}''$, puis la classe $\mathcal{H}$ des réunions finies d'éléments de $\mathcal{H}'$ et la classe $\mathcal{C}$ des réunions finies d'éléments de $\mathcal{C}'$.

La classe $\mathcal{H}$ est une algèbre (d'après Neveu [23], proposition 122, page 7). De plus $\mathcal{H}$ est dénombrable et, comme elle contient $\mathcal{F}_0$, elle engendre $\mathcal{F}$.

La classe $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{H}$. $\mathcal{C}$ est encore une classe compacte (d'après Neveu [23], lemme 1.6.1. page 26). De plus, quels que soient $H \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\begin{cases} C \subset H \\ P(H) - P(C) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Cela peut être montré facilement par récurrence après avoir remarqué que si H_1, H_2, C_1, C_2 sont quatre éléments de $\mathcal{F}$ tels que :

$$\begin{cases} C_1 \subset H_1 \\ P(H_1) - P(C_1) \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_2 \subset H_2 \\ P(H_2) - P(C_2) \leq \varepsilon \end{cases}$$

alors on a :

$$\begin{cases} (C_1 \cap C_2) \subset (H_1 \cap H_2) \\ P(H_1 \cap H_2) - P(C_1 \cap C_2) \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} (C_1 \cup C_2) \subset (H_1 \cup H_2) \\ P(H_1 \cup H_2) - P(C_1 \cup C_2) \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

Il revient au même de dire qu'à tout $H \in \mathcal{H}$ on peut associer une suite $\{C_m\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ contenus dans H (et qu'on peut choisir croissante puisque $\mathcal{C}$ est stable par réunion finie) telle que

$$P(H) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m)$$

C.Q.F.D.

III,3. Construction d'une probabilité conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

LEMME III,3.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Supposons $\mathcal{X}$ engendrée par une famille dénombrable : $\{A_1, A_2, \dots, A_\nu, A_{\nu+1}, \dots\}$

Pour tout $\nu \geq 1$ il existe alors une partition finie de $\mathcal{X}$:

$$\{D_{1,\nu}, D_{2,\nu}, \dots, D_{k,\nu}, D_{k+1,\nu}, \dots, D_{N(\nu),\nu}\}$$

constituée d'éléments de $\mathcal{X}$ et qui engendre la même σ -algèbre que la famille finie : $\{A_1, A_2, \dots, A_\nu\}$

Si on pose, pour $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$P_\nu(x; F) = \sum_{k=1}^{N(\nu)} P_{k,\nu}(F) 1_{D_{k,\nu}}(x)$$

avec :

$$P_{k,\nu}(F) \begin{cases} = P(F) & \text{si } P[X^{-1}(D_{k,\nu})] = 0 \\ = \frac{P[F \cap X^{-1}(D_{k,\nu})]}{P[X^{-1}(D_{k,\nu})]} & \text{si } P[X^{-1}(D_{k,\nu})] \neq 0 \end{cases}$$

et :

$$\overline{P} (x ; F) = \limsup_{v \rightarrow \infty} P_v (x ; F)$$

$$\underline{P} (x ; F) = \liminf_{v \rightarrow \infty} P_v (x ; F)$$

alors, quel que soit $F \in \mathcal{F}$:

$$1. \quad \overline{P} [X(\cdot) ; F] \underset{\text{p.s.}}{=} \underline{P} [X(\cdot) ; F]$$

(la suite de variables aléatoires $\{P_v [X(\cdot) ; F]\}$ est presque sûrement convergente)

$$2. \quad \overline{P} [X(\cdot) ; F] \text{ et } \underline{P} [X(\cdot) ; F]$$

sont deux représentants de l'espérance conditionnelle : $E \{ 1_F / X^{-1}(x) \}$

DÉMONSTRATION :

Au cours de cette démonstration, on supposera $F \in \mathcal{F}$ choisi arbitrairement une fois pour toutes.

Désignons par $\mathcal{X}_v$ la σ -algèbre engendrée par la famille finie :

$$\{ A_1, A_2, \dots, A_{v-1}, A_v \}$$

Comme $\mathcal{X}_v$ est elle-même finie, ses atomes :

$$\{ D_{1,v}, D_{2,v}, \dots, D_{k,v}, \dots, D_{N(v),v} \}$$

constituent bien une partition finie de X (ensembles disjoints, non vides, de réunion X) qui engendrent $\mathcal{X}_v$. (voir Neveu [23], page 7, proposition 1.2.1).

Les images réciproques :

$$X^{-1}(D_{1,v}), X^{-1}(D_{2,v}), \dots, X^{-1}(D_{k,v}), \dots, X^{-1}(D_{N(v),v})$$

sont encore disjointes, de réunion $\Omega = X^{-1}(X)$ et engendrent la σ -algèbre finie : $X^{-1}(\mathcal{X}_v)$.

La variable aléatoire réelle positive :

$$P_v [X(\cdot) ; F] = \sum_{k=1}^{N(v)} P_{k,v}(F) 1_{D_{k,v}} [X(\cdot)]$$

est visiblement $X^{-1}(\mathcal{X}_v)$ -mesurable. De plus, pour tout $A \in \mathcal{X}_v$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] P_v [X(\omega) ; F] P(d\omega) \end{aligned}$$

En effet, d'après les propriétés d'additivité de l'intégrale, il suffit qu'il en soit ainsi pour $A = D_{k,v}$, $k = 1, 2, 3, \dots, N(v)$. Or on a bien, quel que soit $k = 1, 2, 3, \dots, N(v)$:

$$P [F \cap X^{-1}(D_{k,v})] = P_{k,v}(F) \times P [X^{-1}(D_{k,v})]$$

On en déduit que $P_\nu [X(\cdot); F]$ est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ 1_F / X^{-1}(\mathcal{X}_\nu) \right\}$$

Remarquons alors que la suite de variables aléatoires : $\{ P_\nu [X(\cdot); F] ; \nu = 1, 2, 3, \dots \}$ constitue une martingale positive adaptée à la suite croissante de σ -algèbres :

$$X^{-1}(\mathcal{X}_1) \subset X^{-1}(\mathcal{X}_2) \subset \dots \subset X^{-1}(\mathcal{X}_\nu) \subset X^{-1}(\mathcal{X}_{\nu+1}) \subset \dots$$

En effet, pour tout $\nu = 1, 2, 3, \dots$, $P_\nu [X(\cdot); F]$ est $X^{-1}(\mathcal{X}_\nu)$ -mesurable et, pour tout $A \in \mathcal{X}_\nu$ on a, puisque $\mathcal{X}_\nu \subset \mathcal{X}_{\nu+1}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] P_{\nu+1} [X(\omega); F] P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] P_\nu [X(\omega); F] P(d\omega) \end{aligned}$$

ce qui signifie que $P_\nu [X(\cdot); F]$ est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ P_{\nu+1} [X(\cdot); F] / X^{-1}(\mathcal{X}_\nu) \right\}.$$

On déduit en particulier de l'égalité précédente, en prenant $A = \mathbb{X}$:

$$E \left\{ P_{\nu+1} [X(\cdot); F] \right\} = E \left\{ P_\nu [X(\cdot); F] \right\} = P(F)$$

La martingale positive $\{ P_\nu [X(\cdot); F] ; \nu = 1, 2, 3, \dots \}$ est donc équiintégrable et par suite elle converge presque sûrement (abréviation : p.s.); voir par exemple **Neveu** [23], proposition IV.5.4, page 130.

Autrement dit :

$$\bar{P} [X(\cdot); F] \stackrel{\text{p.s.}}{=} \underline{P} [X(\cdot); F]$$

Ces deux variables aléatoires sont $X^{-1}(\mathcal{X})$ -mesurables puisque, quel que soit $\nu \geq 1$, $P_\nu [X(\cdot); F]$ est $X^{-1}(\mathcal{X}_\nu)$ -mesurable donc à plus forte raison $X^{-1}(\mathcal{X})$ -mesurable.

Soit $\mathcal{J}$ la famille des $A \in \mathcal{X}$ tels que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] \bar{P} [X(\omega); F] P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] \underline{P} [X(\omega); F] P(d\omega) \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que, puisque $\bar{P} [X(\cdot) ; F] \stackrel{p.s.}{=} \underline{P} [X(\cdot) ; F]$, la seconde égalité est vérifiée pour tout $A \in \mathcal{X}$.

$\mathcal{Y}$ contient l'algèbre $\bigcup_{v=1}^{\infty} \mathcal{X}_v$.

Soit en effet $A \in \mathcal{X}_{v_0}$; alors, quel que soit $v \geq v_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] P_v [X(\omega) ; F] P(d\omega) \end{aligned}$$

d'où, d'après le lemme de Fatou:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] \underline{P} [X(\omega) ; F] P(d\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} 1_A [X(\omega)] \bar{P} [X(\omega) ; F] P(d\omega) \end{aligned}$$

(voir par exemple **Neveu** [23], proposition II.3.3 et Corollaire page 41).

On en déduit que $A \in \mathcal{Y}$, d'après la remarque précédente.

D'autre part, comme on peut le vérifier facilement, $\mathcal{Y}$ est une classe σ -additive (voir annexe, paragraphe II pour la définition et les propriétés des classes σ -additives; voir aussi lemme V.1 de l'annexe).

$\mathcal{Y}$ contient donc la σ algèbre $\mathcal{X}_{\infty}$ engendrée par l'algèbre $\bigcup_{v=1}^{\infty} \mathcal{X}_v$; or $\mathcal{X}_{\infty}$ contient elle-même la suite $\{ A_1, A_2, \dots, A_v, A_{v+1}, \dots \}$ et par suite la σ algèbre $\mathcal{X}$.

Finalement $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et les variables aléatoires $\bar{P} [X(\cdot) ; F]$ et $\underline{P} [X(\cdot) ; F]$ sont bien des représentants de l'espérance conditionnelle $E \left\{ 1_F / \mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}) \right\}$

C.Q.F.D.

REMARQUE III,3.1

P_v est une probabilité de transition: $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$

- 1 - pour tout $F \in \mathcal{F}$ fixé $P_v(\cdot; F)$ est une fonction mesurable sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$
- 2 - pour x fixé, $P_{x,v}(\cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et par suite, pour x fixé, $P_v(x; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Par contre, rien ne prouve que $\bar{P}$ et $\underline{P}$ soient des probabilités de transition et par suite des probabilités conditionnelles régulières par rapport à $\mathcal{X}$.

Remarquons toutefois que, $P_v(x; \cdot)$ étant une probabilité pour tout $x \in \mathcal{X}$ fixé, l'inclusion $G \subset F$ implique $P_v(x; G) \leq P_v(x; F)$ quel que soit $v = 1, 2, 3, \dots$ et par suite:

$$\bar{P}(x; G) \leq \bar{P}(x; F)$$

$$\underline{P}(x; G) \leq \underline{P}(x; F)$$

REMARQUE III,3.2

La méthode de construction d'une probabilité conditionnelle utilisée dans le lemme précédent peut être considéré comme une application de la méthode proposée par Meyer [21], VIII.9, page 193 pour construire une dérivée de Radon Nicodým.

III,4. Théorème d'existence

THEOREME III,4.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On suppose $\mathcal{F}$ engendrée par une algèbre dénombrable :

$$\mathcal{H} = \{ F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots \}$$

Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable (qu'on peut appeler espace des paramètres) et soit P° une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

On suppose qu'il existe une classe $\mathcal{E}$, constituée d'éléments de l'algèbre dénombrable $\mathcal{H}$, telle que :

1 - $\mathcal{E}$ est une classe compacte (toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$ d'intersection vide a une sous-famille finie d'intersection vide)

2 - à tout $F_n \in \mathcal{H}$ on peut associer une suite $\{ C_m^n ; m=1,2,3,\dots \}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ contenus dans F_n , croissante, et telle que, quel que soit $y \in \mathcal{Y}$:

$$P^\circ(y; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^\circ(y; C_m^n)$$

Soit enfin $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable muni d'une σ -algèbre $\mathcal{X}$ engendrée par une famille dénombrable :

$$\{ A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots \}.$$

Si X est une application mesurable de $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (c'est-à-dire une variable aléatoire à commande définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ avec pour espace de commande $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$) alors il existe une probabilité de transition :

$$P' : (\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

qui a les propriétés suivantes :

1 - pour tout $y \in \mathcal{Y}$, $P'(y, \cdot; \cdot)$ est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire $X(\cdot, y)$ lorsque $(\Omega, \mathcal{F})$ est muni de la probabilité $P^\circ(y; \cdot)$ autrement dit, quels que soient $A \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_F(\omega) P^\circ(y; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] P' [y, X(\omega, y); F] P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

2 - P' possède également, sur l'algèbre $\mathcal{H}$, la propriété d'approximation :

$$P'(y, x; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P'(y, x; C_m^n)$$

quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ et $F_n \in \mathcal{H}$.

DÉMONSTRATION

a) Construction de $\bar{P}'$ et $\underline{P}'$ Soit : $\{ D_{1,v}, D_{2,v}, \dots, D_{k,v}, D_{k+1,v}, \dots, D_{N(v),v} \}$ une partition finie de $\mathbb{X}$ engendrant la même σ -algèbre que la famille finie : $\{ A_1, A_2, \dots, A_v \}$ Pour $y \in \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{X}$ et $F \in \mathcal{F}$ posons :

$$P_{k,v}^{\circ} (y ; F)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = P^{\circ} (y ; F) \text{ si } \int_{\Omega} 1_{D_{k,v}} [X(\omega, y)] P^{\circ}(y ; d\omega) = 0 \\ = \frac{\int_{\Omega} 1_F(\omega) 1_{D_{k,v}} [X(\omega, y)] P^{\circ}(y ; d\omega)}{\int_{\Omega} 1_{D_{k,v}} [X(\omega, y)] P^{\circ}(y ; d\omega)} \text{ sinon} \end{array} \right.$$

et :

$$P_v' (y, x ; F) = \sum_{k=1}^{N(v)} P_{k,v}^{\circ} (y ; F) 1_{D_{k,v}}(x)$$

Les intégrales : $\int_{\Omega} 1_{D_{k,v}} [X(\omega, \cdot)] P^{\circ}(\cdot ; d\omega)$ et : $\int_{\Omega} 1_F(\omega) 1_{D_{k,v}} [X(\omega, \cdot)] P^{\circ}(\cdot ; d\omega)$ définissent des fonctions réelles positives mesurables sur $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$, d'après le théorème III,2 de l'annexe.Pour F fixé, $P_{k,v}^{\circ}(\cdot ; F)$ est donc une fonction réelle positive mesurable sur $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ et par suite $P_v'(\cdot, \cdot ; F)$ est une fonction réelle positive mesurable sur $(\mathbb{Y} \times \mathbb{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ D'autre part, il est clair que, quels que soient y et x fixés, $P_{k,v}^{\circ}(y ; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et par suite que $P_v'(y, x ; \cdot)$ est aussi une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.Posons alors pour $y \in \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\bar{P}' (y, x ; F) = \limsup_{v \rightarrow \infty} P_v' (y, x ; F)$$

$$\underline{P}' (y, x ; F) = \liminf_{v \rightarrow \infty} P_v' (y, x ; F)$$

Notons que, pour $y \in \mathbb{Y}$ et $x \in \mathbb{X}$ fixés, $\bar{P}'(y, x ; \cdot)$ et $\underline{P}'(y, x ; \cdot)$ ne sont pas en général des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ mais que l'inclusion $G \subset F$ implique (cf. remarque III,3.1) :

$$\bar{P}' (y, x ; G) \ll \bar{P}' (y, x ; F)$$

$$\underline{P}' (y, x ; G) \ll \underline{P}' (y, x ; F)$$

b) Construction de $\Delta(F)$

Pour $F \in \mathcal{F}$ fixé, $\{P'_\nu(\cdot, \cdot; F); \nu = 1, 2, 3, \dots\}$ étant une suite de fonctions réelles positives mesurables sur $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$, $\bar{P}'(\cdot, \cdot; F)$ et

$\underline{P}'(\cdot, \cdot; F)$ sont encore des fonctions réelles positives mesurables sur ce même espace. Le « domaine de convergence » de la suite $\{P'_\nu(\cdot, \cdot; F); \nu = 1, 2, 3, \dots\}$:

$$\Delta(F) = \left\{ (y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} : \bar{P}'(y, x; F) = \underline{P}'(y, x; F) \right\}$$

est donc un sous-ensemble de $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X})$ appartenant à la σ -algèbre $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}$

Or, pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé, d'après le lemme III.3 appliqué à la variable aléatoire $X(\cdot, y)$ définie sur l'espace de probabilité $[\Omega, \mathcal{F}, P^\circ(y, \cdot)]$, la suite de variables aléatoires $\{P'_\nu[y, X(\cdot, y); F]; \nu = 1, 2, 3, \dots\}$ converge $P^\circ(y, \cdot)$ -presque sûrement vers un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E_{P^\circ(y, \cdot)} \left\{ 1_F / X(\cdot, y) \right\}$$

On a par suite :

$$(III.1) \quad \int_{\Omega} 1_{[\Delta(F)]^c} [y, X(\omega, y)] P^\circ(y; d\omega) = 0$$

et quel que soit $A \in \mathcal{X}$:

$$(III.2) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_F(\omega) P^\circ(y; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}'[y, X(\omega, y); F] P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

c) Construction de Δ_n

Par hypothèse, pour tout $F_n \in \mathcal{H}$, il existe une suite $\{C_m^n; m = 1, 2, 3, \dots\}$ où $C_m^n \in \mathcal{C}$ et $C_m^n \subset C_{m+1}^n \subset F_n$ pour tout $m = 1, 2, 3, \dots$, telle que, quel que soit $y \in \mathcal{Y}$:

$$P^\circ(y; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^\circ(y; C_m^n)$$

c'est-à-dire

$$P^\circ[y; (F_n - \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m^n)] = 0$$

ou encore :

$$1_{F_n}(\cdot) \stackrel{p.s.}{=} 1_{\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m^n}(\cdot) = \lim_{m \rightarrow \infty} 1_{C_m^n}(\cdot)$$

$P^\circ(y; \cdot)$ -presque sûrement.

D'après le théorème de Lebesgue, on en déduit, quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{F_n}(\omega) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 \text{(III.3)} \quad & = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{C_m^n}(\omega) P^{\circ}(y; d\omega)
 \end{aligned}$$

Or, d'après la relation (III.2), on a, si on fait en particulier $F = F_n$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{F_n}(\omega) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 \text{(III.4)} \quad & = \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}^1(y, X(\omega, y); F_n) P^{\circ}(y; d\omega)
 \end{aligned}$$

et, si on fait en particulier $F = C_m^n$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{C_m^n}(\omega) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 \text{(III.5)} \quad & = \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}^1(y, X(\omega, y); C_m^n) P^{\circ}(y; d\omega)
 \end{aligned}$$

En prenant la limite supérieure des deux membres de (III.5), et en appliquant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{C_m^n}(\omega) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 & = \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}^1(y, X(\omega, y); C_m^n) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 & \leq \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1(y, X(\omega, y); C_m^n) \right\} P^{\circ}(y; d\omega)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (III.3) et (III.4)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}^1(y, X(\omega, y); F_n) P^{\circ}(y; d\omega) \\
 \text{(III.6)} \quad & \leq \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1(y, X(\omega, y); C_m^n) \right\} P^{\circ}(y; d\omega)
 \end{aligned}$$

Soit alors :

$$\Delta_n =$$

$$\left\{ (y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} : \limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1(y, x; C_m^n) \geq \bar{P}^1(y, x; F_n) \right\}$$

Δ_n est un sous-ensemble mesurable de $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ et pour $y \in \mathcal{Y}$ fixé, la section

$\Delta_n|_y = \left\{ x \in \mathcal{X} : (x, y) \in \Delta_n \right\}$ est un sous-ensemble mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

D'après la relation (III.6), écrite en prenant $A = (\Delta_n|_y)^c$, on a pour tout $y \in \mathcal{Y}$:

$$\int_{\Omega} 1_{(\Delta_n)^c} [y, X(\omega, y)] \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1[y, X(\omega, y); C_m^n] - \bar{P}^1[y, X(\omega, y); F_n] \right\} P^0(y; d\omega) \geq 0$$

ce qui nécessite, par définition même de Δ_n :

$$(III.7) \quad \int_{\Omega} 1_{(\Delta_n)^c} [y, X(\omega, y)] P^0(y; d\omega) = 0$$

D'autre part, puisque par hypothèse $C_m^n \subset F_n$ pour tout $m=1, 2, 3, \dots$, on a nécessairement, quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$:

$$\bar{P}^1(y, x; C_m^n) \leq \bar{P}^1(y, x; F_n)$$

d'après une remarque faite à propos de la construction de $\bar{P}^1$, et par suite :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1(y, x; C_m^n) \leq \bar{P}^1(y, x; F_n)$$

Δ_n est donc le « domaine d'approximation » de $\bar{P}^1(\cdot, \cdot; F_n)$:

$$\Delta_n =$$

$$\left\{ (y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} : \limsup_{m \rightarrow \infty} \bar{P}^1(y, x; C_m^n) = \bar{P}^1(y, x; F_n) \right\}$$

d) Construction de $\tilde{P}^1$

Posons :

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Delta_n \cap \Delta(F_n)]$$

Cette intersection étant dénombrable, Δ est encore un sous-ensemble mesurable de $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$ et, d'après les relations (III.1) et (III.7) on a pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé :

$$(III.8) \quad \int_{\Omega} 1_{\Delta^c} [y, x(w, y)] P^0(y; dw) = 0$$

On définit alors $\tilde{P}'$ en posant, pour $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}'(y, x; F) \\ = 1_{\Delta}(y, x) \bar{P}'(y, x; F) + 1_{\Delta^c}(y, x) P^0(y; F) \end{aligned}$$

Pour tout $F \in \mathcal{F}$ fixé $\tilde{P}'(\cdot, \cdot; F)$ est une fonction réelle positive mesurable sur $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$.

D'autre part, si $(y, x) \in \Delta^c$ alors, quel que soit $F \in \mathcal{F}$:

$$\tilde{P}'(y, x; F) = P^0(y; F) \text{ et par suite :}$$

$$1. \quad \tilde{P}'(y, x; \Omega) = 1$$

$$2. \text{ pour } F_n \in \mathcal{H}, F_p \in \mathcal{H} \text{ et } F_n \cap F_p = \emptyset :$$

$$\tilde{P}'(y, x; F_n \cup F_p) = \tilde{P}'(y, x; F_n) + \tilde{P}'(y, x; F_p)$$

$$3. \text{ pour } F_n \in \mathcal{H} :$$

$$\tilde{P}'(y, x; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{P}'(y, x; C_m^n)$$

Si par contre $(y, x) \in \Delta$, alors quel que soit $F \in \mathcal{F}$:

$$\tilde{P}'(y, x; F) = \bar{P}'(y, x; F)$$

Or, d'après la construction même de Δ , on a dans ce cas, pour tout $F_n \in \mathcal{H}$:

$$(III.9) \quad \bar{P}'(y, x; F_n) = \lim_{v \rightarrow \infty} P_v'(y, x; F_n)$$

$$(III.10) \quad \bar{P}'(y, x; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \bar{P}'(y, x; C_m^n)$$

On déduit de la relation (III.9) et des propriétés de P_v' :

$$1. \quad \tilde{P}'(y, x; \Omega) = 1$$

$$2. \text{ pour } F_n \in \mathcal{H}, F_p \in \mathcal{H} \text{ et } F_n \cap F_p = \emptyset$$

$$\tilde{P}'(y, x; F_n \cup F_p) = \tilde{P}'(y, x; F_n) + \tilde{P}'(y, x; F_p)$$

De la relation (III.10) on déduit :

$$\tilde{P}'(y, x; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \tilde{P}'(y, x; C_m^n)$$

ou encore, puisque $\{C_m^n ; m = 1, 2, 3 \dots\}$ est une suite croissante :

$$3. \quad \tilde{P}'(y, x ; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{P}'(y, x ; C_m^n) \quad \text{pour tout} \quad F_n \in \mathcal{H}$$

Les propriétés 1- 2- 3- sont donc vraies quels que soient $x \in X$, $y \in Y$.

e) Construction de P'

On vient de montrer que les hypothèses nécessaires sont réunies pour pouvoir appliquer à $\tilde{P}'$ successivement un résultat relatif à la σ -additivité d'une fonction additive d'ensemble définie sur une algèbre $\mathcal{H}$ et approximable sur une sous-classe compacte $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ (théorème d'Alexandrov, voir Neveu [23], page 27, proposition 1.6.2 ou Meyer [21] III, théorème 29, page 74), puis un résultat relatif au prolongement d'une probabilité définie sur une algèbre, sur la σ -algèbre engendrée par cette algèbre (théorème de Carathéodory, voir Neveu [23] théorème de prolongement, p. 23 ou Meyer [21] II, théorème 25, page 41).

On peut donc affirmer que, pour tout $(y, x) \in Y \times X$, il existe une probabilité (et une seule) $P'(y, x ; \cdot)$, définie sur la σ -algèbre $\mathcal{F}$ engendrée par $\mathcal{H}$, qui coïncide avec $\tilde{P}'(y, x ; \cdot)$ sur l'algèbre $\mathcal{H}$.

Vérifions que P' a bien les propriétés annoncées. En effet, d'après les propriétés de $\tilde{P}'$:

- 1 - pour tout $F_n \in \mathcal{H}$ fixé, $P'(\cdot, \cdot ; F_n)$ est une fonction réelle positive mesurable sur $(Y \times X, Y \otimes X)$ et par suite, d'après le lemme III.1 de l'annexe, P' est une probabilité de transition de $(Y \times X, Y \otimes X)$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.
- 2 - pour tout $y \in Y$ et tout $F_n \in \mathcal{H}$ fixés $P'[y, X(\cdot, y) ; F_n]$ est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$P^{\circ}(y ; \cdot) \left\{ 1_{F_n} / X(\cdot, y) \right\}$$

car, pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a, d'après (III.2) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{F_n}(\omega) P^{\circ}(y ; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \bar{P}'[y, X(\omega, y) ; F_n] P^{\circ}(y ; d\omega) \end{aligned}$$

ou, d'après (III.8) :

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{\Delta}[y, X(\omega, y)] \bar{P}'[y, X(\omega, y) ; F_n] P^{\circ}(y ; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_{\Delta}[y, X(\omega, y)] \tilde{P}'[y, X(\omega, y) ; F_n] P^{\circ}(y ; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] \tilde{P}'[y, X(\omega, y) ; F_n] P^{\circ}(y ; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] P'[y, X(\omega, y) ; F_n] P^{\circ}(y ; d\omega) \end{aligned}$$

D'après le lemme V.2 de l'annexe, $P^1[y, \cdot; \cdot]$ est donc une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire $X(\cdot, y)$ définie sur $\{\Omega, \mathcal{F}, P^0(y; \cdot)\}$, autrement dit quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $F \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] 1_F(\omega) P^0(y; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X(\omega, y)] P^1[y, X(\omega, y); F] P^0(y; d\omega) \end{aligned}$$

3 - enfin, quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$, $F_n \in \mathcal{H}$:

$$P^1(y, x; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^1(y, x; C_m^n) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE III.4.2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On suppose que $\mathcal{F}$ est engendrée par une algèbre dénombrable

$\mathcal{H} = \{F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots\}$ et qu'il existe une classe compacte $\mathcal{C}$ constituée

d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que l'on puisse associer à tout $F_n \in \mathcal{H}$ une suite croissante :

$\{C_m^n; m = 1, 2, 3, \dots\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ contenus dans F_n telle que :

$$P(F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m^n)$$

1 - Soit $(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$ un espace mesurable tel que $\mathcal{U}$ soit engendré par une famille dénombrable : $\{B_1, B_2, \dots, B_\nu, B_{\nu+1}, \dots\}$.

Si Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$ alors il existe une probabilité de transition $P^0 : (\mathcal{Y}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

- a) P^0 est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire Y .
- b) P^0 possède sur $\mathcal{H}$ la propriété d'approximation :

$$P^0(y; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^0(y; C_m^n)$$

quels que soient $y \in \mathcal{Y}$ et $F_n \in \mathcal{H}$.

2 - Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable tel que $\mathcal{X}$ soit engendrée par une famille dénombrable : $\{A_1, A_2, \dots, A_\nu, A_{\nu+1}, \dots\}$.

Si X est une variable aléatoire à commande définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et d'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, alors il existe une probabilité de transition :

$$P^1 : (\mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

telle que :

- a) P^1 est une probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à la variable aléatoire à commande X et relativement à la probabilité de transition P^0 (selon la définition de l'alinéa III.1).
- b) P^1 possède sur $\mathcal{H}$ la propriété d'approximation :

$$P'(y, x, u; F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P'(y, x, u; C_n^n)$$

quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ et $F_n \in \mathcal{H}$.

REMARQUE III.4.3.

Rappelons que le lemme III.2 donne une condition suffisante pour que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifie les hypothèses requises dans ce corollaire.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE III.4.2.

La première partie du corollaire (existence de P°) apparaît comme un cas particulier du théorème III.4.1, appliqué en prenant un espace des paramètres réduit à un seul point. La seconde partie du corollaire (existence de P') se déduit alors de la première partie et, à nouveau, du théorème III.4.1, appliqué cette fois en prenant pour espace des paramètres l'espace produit : $(\mathcal{Y} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{U})$ et en considérant :

- P° comme une probabilité de transition de $(\mathcal{Y} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{U})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ particulière
- X comme une application mesurable de $(\Omega \times \mathcal{Y} \times \mathcal{U}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{U})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ particulière.

C.Q.F.D.

III.5. Application aux probabilités conditionnelles régulières ordinaires

La première partie du corollaire III.4.2 donne une condition suffisante d'existence de probabilités conditionnelles régulières (ordinaires) sous des hypothèses qui semblent plus restrictives que celles du théorème de Jirina (cf. Neveu [23], V.4, page 175, corollaire de la proposition V.4.4). On peut montrer en fait que ce dernier est une conséquence du corollaire III.4.2. Pour cela, on a besoin du résultat préliminaire suivant :

LEMME III.5.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Supposons $\mathcal{F}$ engendrée par une classe dénombrable $\mathcal{A}$, qu'on peut toujours supposer être une algèbre.

Soit $\mathcal{G}$ une sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$. Il existe alors une sous-famille dénombrable $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}$, qui engendre une σ -algèbre $\mathcal{P}$ (évidemment contenue dans $\mathcal{G}$) identique à $\mathcal{G}$ à des ensembles de probabilité nulle près, c'est-à-dire telle que, pour tout $G \in \mathcal{G}$, il existe un $S \in \mathcal{P}$ tel que : $P(G \Delta S) = 0$

DÉMONSTRATION :

Rappelons d'abord, qu'étant donné deux éléments A et B de $\mathcal{F}$, on appelle différence symétrique entre A et B l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

La fonction réelle positive δ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par :

$$\delta(A, B) = P(A \Delta B)$$

est une semi-distance sur $\mathcal{F}$. En particulier on a l'inégalité du triangle :

$$P(A \Delta B) \leq P(A \Delta C) + P(C \Delta B)$$

En effet :

$$A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$$

car :

$$A \Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

et :

$$A^c \cap B = (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \subset (B \Delta C) \cup (A \Delta C)$$

$$A \cap B^c = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$$

Ces rappels étant faits, le lemme se montre de la façon suivante.

La probabilité P définie sur $\mathcal{F}$ peut être considérée comme le prolongement sur la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ de la restriction de P à $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{B}$ la classe des réunions finies ou dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$.

Pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a :

$$P(F) = \inf \{ P(B) ; B \in \mathcal{B}, B \supset F \}$$

(d'après Neveu [23], I.5 « prolongement d'une probabilité », p. 19 à 23).

Par suite, pour tout $F \in \mathcal{F}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} B \supset F \\ P(B) - P(F) \leq \varepsilon/2 \quad \text{ou encore :} \quad P(B \Delta F) \leq \varepsilon/2 \end{array} \right.$$

Or, par définition de $\mathcal{B}$, pour tout $B \in \mathcal{B}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ P(B) - P(A) \leq \varepsilon/2 \quad \text{ou encore :} \quad P(B \Delta A) \leq \varepsilon/2 \end{array} \right.$$

On en déduit, d'après l'inégalité du triangle, que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que : $P(F \Delta A) \leq \varepsilon$.

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots\}$ une énumération de l'algèbre $\mathcal{A}$. Posons :

$$\rho_n = \inf_{G \in \mathcal{G}} P(A_n \Delta G)$$

Par définition de ρ_n , quel que soit l'entier $m \geq 1$, il existe $G_n^m \in \mathcal{G}$ tel que :

$$\rho_n \leq P(A_n \Delta G_n^m) \leq \rho_n + \frac{1}{m}$$

La famille :

$$\mathcal{D} = \{ G_n^m ; n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots \}$$

est une sous-famille dénombrable de $\mathcal{G}$.

Soit alors G un élément quelconque de la σ -algèbre $\mathcal{G}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $A_n \in \mathcal{A}$ tel que :

$$P(G \Delta A_n) \leq \varepsilon/3$$

(en effet G appartient à plus forte raison à $\mathcal{F}$). L'inégalité précédente implique en particulier $\rho_n \leq \varepsilon/3$

Si on choisit l'entier m tel que $1/m \leq \varepsilon/3$ on a alors :

$$P(A_n \Delta G_n^m) \leq \rho_n + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

et par suite, d'après l'inégalité du triangle :

$$P(G \Delta G_n^m) \leq \varepsilon$$

On peut donc trouver une suite $\{D_1, D_2, \dots, D_n, D_{n+1}, \dots\}$ d'éléments de la famille dénombrable $\mathcal{D}$ telle que, quel que soit n :

$$P(G \Delta D_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$P(G \cap D_n^c) + P(G^c \cap D_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

Posons d'abord $S_p = \bigcup_{n=p}^{\infty} D_n$. On a :

$$P(G \cap S_p^c) = P[G \cap (\bigcap_{n=p}^{\infty} D_n^c)]$$

$$\leq P(G \cap D_q^c) \leq \frac{1}{2^q} \quad \text{pour tout entier } q > p$$

par suite : $P (G \cap S_p^c) = 0$

et :

$$\begin{aligned} P (G^c \cap S_p) &= P [G^c \cap (\bigcup_{n=p}^{\infty} D_n)] \\ &\leq \sum_{n=p}^{\infty} P (G^c \cap D_n) \leq \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{p-1}} \end{aligned}$$

Posons ensuite $S = \bigcap_{p=1}^{\infty} S_p$. On a :

$$\begin{aligned} P (G \cap S^c) &= P [G \cap (\bigcup_{p=1}^{\infty} S_p^c)] \\ &= P [\bigcup_{p=1}^{\infty} (G \cap S_p^c)] = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P (G^c \cap S) &= P [G^c \cap (\bigcap_{p=1}^{\infty} S_p)] \\ &\leq P (G^c \cap S_p) \leq \frac{1}{2^{p-1}}, \text{ pour tout entier } p \geq 1 \end{aligned}$$

par suite : $P (G^c \cap S) = 0$

d'où finalement :

$$P (G \Delta S) = P (G \cap S^c) + P (G^c \cap S) = 0$$

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que l'ensemble S ainsi construit appartient bien à la σ -algèbre $\mathcal{S}$ engendrée par la famille dénombrable $\mathcal{D}$.

REMARQUE III.5.2.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$:

$$A \mathcal{R} B \text{ si et seulement si } P (A \Delta B) = 0$$

Le lemme précédent revient à dire que tout sous-espace de l'espace métrique séparable $\mathcal{F} / \mathcal{R}$ (muni de la distance $\tilde{\delta} (\hat{A}, \hat{B}) = P (A \Delta B)$ où $A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$ et du sous-ensemble dénombrable dense $\mathcal{A} / \mathcal{R}$) est lui-même séparable.
(cf. **Dunford-Schwartz** [11], I.6.12, p. 21).



Rappelons, qu'étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une sous σ -algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, on appelle probabilité conditionnelle régulière par rapport à $\mathcal{G}$, une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire :

$$\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightsquigarrow \omega \in (\Omega, \mathcal{G})$$

On peut alors énoncer et démontrer sous forme de corollaire le théorème d'existence de Jirina mentionné en début d'alinéa :

COROLLAIRE III.5.3.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité tel que la σ -algèbre $\mathcal{F}$ soit engendrée par une famille dénombrable et qu'il existe une classe $\mathcal{K}$ compacte contenue dans $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $F \in \mathcal{F}$:

$$P(F) = \sup \{ P(K) ; K \in \mathcal{K}, K \subset F \}$$

Pour toute sous σ -algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, il existe alors au moins une probabilité conditionnelle régulière par rapport à $\mathcal{G}$.

DÉMONSTRATION :

Si $\mathcal{G}$ est elle-même engendrée par une sous-famille dénombrable, le résultat est une conséquence immédiate du corollaire III.4.2, dont les hypothèses sont réunies d'après le lemme III.2.

Sinon, il existe une sous σ -algèbre $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{G}$, engendrée par une sous-famille dénombrable, et identique à $\mathcal{G}$ à des ensembles de probabilité nulle près, d'après le lemme III.5.1. Soit P° une probabilité conditionnelle régulière par rapport à $\mathcal{Y}$.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $P^\circ(\omega; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Pour $F \in \mathcal{F}$ fixé $P^\circ(\cdot; F)$ est une fonction réelle $\mathcal{Y}$ -mesurable et par suite $\mathcal{G}$ -mesurable. Enfin, pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $G \in \mathcal{G}$ il existe un $S \in \mathcal{Y}$ tel que $P(G \Delta S) = 0$ et par suite on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_G(\omega) 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_S(\omega) 1_F(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_S(\omega) P^\circ(\omega; F) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_G(\omega) P^\circ(\omega; F) P(d\omega) \end{aligned}$$

On en déduit que P° est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à $\mathcal{G}$.

REMARQUE :

Signalons qu'il existe des versions du théorème de Jirina plus générales que celle donnée par Neveu[23], ne nécessitant plus que $\mathcal{F}$ soit engendrée par une algèbre dénombrable. Ces généralisations paraissent difficiles à étendre aux probabilités conditionnelles régulières « généralisées ». La construction que l'on utilise doit en effet préserver la mesurabilité par rapport au couple de paramètres (y, u) , ce qui oblige notamment à être très prudent dans la manipulation des ensembles de mesure nulle, pour la probabilité $P^\circ(y; \cdot)$ par exemple.



IV - CONSTRUCTION D'ESPÉRANCES ET DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES LIÉES A UNE VARIABLE ALÉATOIRE A COMMANDE ADAPTÉE A UNE OBSERVATION

IV.1. Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire à commande bouclée réelle positive par rapport à une observation

LEMME IV.1.1.

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. Supposons qu'il existe une probabilité conditionnelle régulière par rapport à Y ; notons la $P^\circ : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$.

Soit λ une fonction réelle positive mesurable définie sur $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$.

Alors on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \lambda(\omega, Y(\omega)) P(d\omega) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) \int_{\Omega} \lambda(\omega, y) P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

(où $P Y^{-1}$ est la probabilité image de P par Y , définie en posant pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$P Y^{-1}(B) = P\{Y^{-1}(B)\} = \int_{\Omega} 1_B[Y(\omega)] P(d\omega)$$

DÉMONSTRATION

D'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, il suffit de montrer le résultat cherché dans le cas particulier où λ est de la forme : $\lambda(\omega, y) = 1_H(\omega, y)$, avec $H \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y}$ (cf. Neveu [23], prop. II.3.3, p. 40 et prop. II.2.4, p. 34).

Posons alors, pour tout $H \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \pi_1(H) &= \int_{\Omega} 1_H(\omega, Y(\omega)) P(d\omega) \\ \pi_2(H) &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) \int_{\Omega} 1_H(\omega, y) P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

D'après le corollaire III.3 de l'annexe, π_1 est une probabilité sur $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$.

D'après le corollaire III.5 de l'annexe, joint au même corollaire III.3, π_2 est également une probabilité sur $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$.

Or, ces deux probabilités coïncident sur la classe des pavés mesurables : de $\Omega \times \mathcal{Y}$:

$$\left\{ F \times B \quad ; \quad F \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{Y} \right\}$$

En effet on a alors, puisque P° est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à Y , pour tout

pavé mesurable $F \times B$:

$$\begin{aligned}\pi_2 (F \times B) &= \int_{\mathcal{Y}} 1_B (y) P^\circ (y ; F) P_{Y^{-1}} (dy) \\ &= \int_{\Omega} 1_B [Y(\omega)] P^\circ [Y(\omega) ; F] P (d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_B [Y(\omega)] 1_F (\omega) P (d\omega) \\ &= \pi_1 (F \times B)\end{aligned}$$

On en déduit, d'après le corollaire II.2 de l'annexe que les probabilités π_1 et π_2 coïncident sur la σ -algèbre engendrée par les pavés mesurables, c'est-à-dire sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{Y}$.

C.Q.F.D.

Le théorème suivant étend aux variables aléatoires à commandes réelles positives le lemme V.3 de l'annexe (2^e partie).

THÉORÈME IV.1.2.

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Supposons qu'il existe une probabilité conditionnelle régulière P° par rapport à Y .

Soit L une variable aléatoire à commande, réelle positive, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Soit M la fonction réelle positive définie sur $(\mathcal{Y} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{U})$ en posant :

$$M (y , u) = \int_{\Omega} L (\omega , u) P^\circ (y ; d\omega)$$

Quelle que soit l'application mesurable α :

$$\alpha : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

alors, si on désigne par $\bar{L}$ la variable aléatoire réelle positive à commande bouclée définie par :

$$\bar{L} (\omega) = L [\omega , \alpha (Y(\omega))]$$

la variable aléatoire réelle positive $\bar{M}$ définie par :

$$\bar{M} (\omega) = M [Y(\omega) , \alpha (Y(\omega))]$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ \bar{L} / Y \right\}$$

DÉMONSTRATION

Remarquons d'abord que la mesurabilité de M est assurée par le théorème III.2 de l'annexe.

Dans ces conditions, il est clair que $\bar{M}$ est $Y^{-1}(\mathcal{Y})$ -mesurable.

D'autre part, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on a, d'après le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_B [Y(\omega)] L [\omega, \alpha(Y(\omega))] P(d\omega) \\
 = & \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) 1_B(y) \int_{\Omega} L [\omega, \alpha(y)] P^{\circ}(y; d\omega) \\
 = & \int_{\mathcal{Y}} 1_B(y) M[y, \alpha(y)] P Y^{-1}(dy) \\
 = & \int_{\Omega} 1_B[Y(\omega)] M[Y(\omega), \alpha(Y(\omega))] P(d\omega)
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

REMARQUE IV.1.3.

Le théorème IV.1.2 peut naturellement s'appliquer au cas où L est construite à partir d'une variable aléatoire à commande X à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ et d'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et au moyen d'une fonction réelle positive mesurable φ définie sur $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$, en posant :

$$L(\omega, u) = \varphi[X(\omega, u)]$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et $u \in \mathcal{U}$.

On obtient alors, sous une forme précise, le résultat sur le « filtrage » annoncé au paragraphe II. En effet, si M est définie comme dans le théorème précédent, la variable aléatoire : $M[Y(\cdot), u]$ est en particulier, pour tout $u \in \mathcal{U}$ fixé, un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$(II.1) \quad E \left\{ \varphi(\bar{X}) / \mathcal{Y} \right\}$$

pour la fonction de commande constante :

$$y \in \mathcal{Y} \quad \rightsquigarrow \quad u$$

Si on connaît ce représentant de (II.1) pour toutes les fonctions de commande constantes, alors on peut obtenir un représentant de (II.1) pour une fonction de commande quelconque α , en remplaçant formellement, dans $M[Y(\cdot), u]$, u par la valeur prise effectivement par la commande soit : $\alpha[Y(\cdot)]$.

IV.2. Probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire à commande bouclée et une observation

THÉORÈME IV.2.1.

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité sur lequel sont définies une variable aléatoire Y à valeur dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et une variable aléatoire à commande X à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ et d'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

On suppose qu'il existe :

- 1 - une probabilité conditionnelle régulière P° par rapport à la variable aléatoire Y .
- 2 - une probabilité conditionnelle régulière généralisée P' par rapport à la variable aléatoire à commande X relativement à la probabilité de transition P° (voir la définition du paragraphe III).

Quelle que soit l'application mesurable α :

$$\alpha : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

alors, si on désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire à commande bouclée :

$$\bar{X}(\cdot) = X\{\cdot, \alpha[Y(\cdot)]\}$$

la probabilité de transition :

$$\bar{P}' : (\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

définie en posant :

$$\bar{P}'(y, x; F) = P'[y, x, \alpha(y); F]$$

pour $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$, constitue une probabilité conditionnelle régulière sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par rapport au couple de variables aléatoires $(Y, \bar{X})$.

DÉMONSTRATION

Remarquons d'abord que, d'après la mesurabilité de α , $\bar{P}'$ est bien une probabilité de transition :

$$\bar{P}' : (\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

Il reste à prouver que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\bar{P}'[Y(\cdot), \bar{X}(\cdot); F]$ est bien un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E\left\{1_F(\cdot) \mid Y, \bar{X}\right\}$$

La mesurabilité par rapport à la σ -algèbre $Y^{-1}(\mathcal{Y}) \vee \bar{X}^{-1}(\mathcal{X})$ engendrée par le couple $(Y, \bar{X})$ ne fait pas de doute.

Soient $A \in \mathcal{X}$ et $B \in \mathcal{Y}$; d'après le lemme IV.1.1

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A[\bar{X}(\omega)] 1_B[Y(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A\{X[\omega, \alpha(Y(\omega))]\} 1_B[Y(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) 1_B(y) \int_{\Omega} 1_A\{X[\omega, \alpha(y)]\} 1_F(\omega) P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par définition même de la notion de probabilité conditionnelle régulière généralisée :

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) 1_B(y) \\ & \quad \int_{\Omega} 1_A\{X[\omega, \alpha(y)]\} P'\{y, X[\omega, \alpha(y)], \alpha(y); F\} \\ & \quad P^\circ(y; d\omega) \end{aligned}$$

ou encore, en appliquant une nouvelle fois le lemme IV.1.1 :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} 1_A \{ X [\omega, \alpha(Y(\omega))] \} 1_B [Y(\omega)] \\
 &\quad P' \{ Y(\omega), X [\omega, \alpha(Y(\omega))], \alpha(Y(\omega)) ; F \} P(d\omega) \\
 &= \int_{\Omega} 1_A [\bar{X}(\omega)] 1_B [Y(\omega)] \\
 &\quad \bar{P}' [Y(\omega), \bar{X}(\omega) ; F] P(d\omega)
 \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que la classe des ensembles :

$$\{ Y^{-1}(B) \cap \bar{X}^{-1}(A) ; B \in \mathcal{Y}, A \in \mathcal{X} \}$$

est stable par intersection finie (contient en particulier Ω) et engendre la σ -algèbre :

$$Y^{-1}(\mathcal{Y}) \vee \bar{X}^{-1}(\mathcal{X}) = \sigma \{ Y, \bar{X} \}$$

pour pouvoir appliquer le lemme V.1 de l'annexe et en déduire que :

$$P' (Y, \bar{X} \mid F) \text{ est bien un représentant de : } E \{ 1_F / Y, \bar{X} \}$$

C.Q.F.D.

REMARQUE IV.2.2.

D'après le lemme V.3 de l'annexe, si Z est une variable aléatoire réelle positive et si Ψ est la fonction réelle positive mesurable définie sur $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$ en posant, pour $y \in \mathcal{Y}, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$:

$$\Psi (y, x, u) = \int_{\Omega} Z(\omega) P' (y, x, u ; d\omega)$$

la variable aléatoire :

$$\Psi [Y(\cdot), \bar{X}(\cdot), \alpha(Y(\cdot))]$$

est donc un représentant de :

$$(II.2) \quad E \{ Z / Y, \bar{X} \}$$

On obtient ainsi de façon précise le résultat sur le «filtrage» annoncé au paragraphe II.

En effet, la variable aléatoire $\Psi [Y(\cdot), X(\cdot, u), u]$ est en particulier, pour tout $u \in \mathcal{U}$ fixé, un représentant de l'espérance conditionnelle (II.2) pour la fonction de commande constante :

$$y \in \mathcal{Y} \longmapsto u$$

Si on connaît ce représentant de (II.2) pour toutes les fonctions de commande constantes, alors on peut obtenir un représentant de (II.2) pour une fonction de commande quelconque α , en remplaçant formellement dans $\Psi [Y(\cdot), X(\cdot, u), u]$, u par la valeur prise effectivement par la commande, soit $\alpha [Y(\cdot)]$



Chapitre 2

PROCESSUS ALÉATOIRES A COMMANDE

I - PROCESSUS ALÉATOIRES A COMMANDE (EN TEMPS DISCRET)

1,1. Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables appelés respectivement espace d'état et espace de commande.

On appelle *processus aléatoire à commande* à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, une suite finie ou dénombrable : $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots)$ d'applications mesurables :

$$X_k : (\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) \in (\Omega \times \mathcal{U}^k, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^k)$$

$$\longrightarrow X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) \in (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

X_0 est donc une variable aléatoire ordinaire (appelée état initial) et $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ des variables aléatoires à 1, 2, ... k , ... commandes.

L'indice entier k sera habituellement considéré comme le « temps ».

Si on ne s'intéresse qu'aux valeurs de l'indice k comprises entre 0 et N , on dira que le processus aléatoire à commande $\{X_k\}$ est à horizon N . Cela revient à dire qu'on s'est fixé un instant final N pour le processus. Si au contraire toutes les valeurs entières positives sont permises pour k , on dira que le processus aléatoire à commande $\{X_k\}$ est à horizon infini.

REMARQUE

On pourrait très bien envisager des processus aléatoires à commande pour lesquels l'espace d'état $(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_k)$ et l'espace de commande $(\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_k)$ dépendent de l'indice k . Comme on pourra le constater, les résultats établis dans ce chapitre pourraient être aisément étendus à ce cas. Nous n'avons renoncé à exposer cette extension que pour ne pas alourdir davantage les notations.

1,2. Premier exemple : processus aléatoire à commande défini par une équation d'évolution

Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ un espace mesurable appelé espace de bruit. Soit $(V_0, V_1, \dots, V_k, \dots)$ un processus aléatoire (ordinaire) défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et à valeurs dans $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables, f_0 une application mesurable de $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ une suite d'applications mesurables de $(\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Il est clair que la suite d'applications mesurables $(X_0, X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots)$, X_k étant définie sur $(\Omega \times \mathcal{U}^k, \mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^k)$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, construites

en posant pour tout $\omega \in \Omega$ et tous $u_1, u_2, \dots, u_k \in LII$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0(\omega) = f_0 [V_0(\omega)] \\ X_1(\omega, u_1) = f_1 [X_0(\omega), u_1, V_1(\omega)] \\ \dots\dots\dots \\ X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) = f_k [X_{k-1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, V_k(\omega)] \end{array} \right.$$

constitue bien un processus aléatoire à commande au sens de l'alinéa précédent.

On dira que :

$$x_k = f_k (x_{k-1}, u_k, v_k)$$

est « l'équation d'évolution » du processus, et que :

$$x_0 = f_0 (v_0)$$

en est la « condition initiale ».

REMARQUE 1,2.1.

Ce premier exemple montre que le formalisme le plus généralement utilisé pour décrire les « processus d'état » (voir par exemple **Striabel** [26] et **Aoki** [1], chapitre II) est un cas particulier du formalisme adopté ici.

REMARQUE 1,2.2.

Dans cet exemple on pourrait très bien prendre comme espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité « canonique » du processus aléatoire ordinaire $(V_0, V_1, \dots, V_k, \dots)$ (voir **Neveu** [23], III.3, p. 79 et **Meyer** [21], IV.7, p. 80). On aurait alors :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathcal{V}, \mathcal{V})^{\sim} \quad \text{ou} \quad = (\mathcal{V}, \mathcal{V})^{\mathcal{N}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$$

$$V_k (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots) = v_k \quad \text{pour tout} \quad \omega = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots) \in \Omega$$

1,3. Deuxième exemple : processus aléatoire à commande défini à partir d'un autre processus aléatoire à commande par une équation d'observation

Soit $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ un processus aléatoire à commande défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à commandes dans $(LII, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Soient $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable, et $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}, \dots$ une suite d'applications mesurables :

$$\eta_k : (\omega, x_0, u_1, x_1, \dots, u_k, x_k) \in [\Omega \times \mathcal{X} \times (LII \times \mathcal{X})^k, \mathcal{F} \otimes \mathcal{X} \otimes (\mathcal{U} \otimes \mathcal{X})^k]$$

$$\xrightarrow{\quad} \eta_k (\omega, x_0, u_1, x_1, \dots, u_k, x_k) \in (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

Il est clair que la suite d'applications mesurables $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0(\omega) = \eta_0 [\omega, X_0(\omega)] \\ Y_1(\omega, u_1) = \eta_1 [\omega, X_0(\omega), u_1, X_1(\omega, u_1)] \\ \dots\dots\dots \\ Y_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) = \eta_k [\omega, X_0(\omega), u_1, X_1(\omega, u_1), \dots, u_k, X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k)] \end{array} \right.$$

constitue aussi un processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à commande dans $(U, \mathcal{U})$ mais à valeurs dans $(Y, \mathcal{Y})$.

On dira que $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$ est défini à partir de $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ par «l'équation d'observation» :

$$y_k = \eta_k (\omega, x_0, u_1, x_1, u_2, x_2, \dots, u_k, x_k)$$

(avec pour observation initiale : $y_0 = \eta_0 (\omega, x_0)$).

En pratique, les fonctions d'observation $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k, \dots$ pourront être définies par récurrence de la façon suivante : $(W_0, W_1, \dots, W_k, \dots)$ étant un processus aléatoire ordinaire, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(W, \mathcal{W})$, appelé espace de bruit, h_0 étant une application mesurable :

$$h_0 : (\mathcal{X} \times W, \mathcal{X} \otimes \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

et $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ une suite d'applications mesurables :

$$h_k : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times U \times W, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \otimes U \otimes \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 (\omega, x_0) = h_0 [x_0, W_0(\omega)] \\ \eta_1 (\omega, x_0, u_1, x_1) = h_1 [x_1, \eta_0 (\omega, x_0), u_1, W_1(\omega)] \\ \dots\dots\dots \\ \eta_k (\omega, x_0, u_1, x_1, \dots, u_{k-1}, x_{k-1}, u_k, x_k) \\ \qquad \qquad \qquad = h_k [x_k, \eta_{k-1} (\omega, x_0, u_1, x_1, \dots, u_{k-1}, x_{k-1}), u_k, W_k(\omega)] \end{array} \right.$$

On dira alors que $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$ est défini à partir de $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ par «l'équation d'observation» et «l'observation initiale» :

$$\begin{aligned} y_k &= h_k (x_k, y_{k-1}, u_k, w_k) \\ y_0 &= h_0 (x_0, w_0) \end{aligned}$$

Dans le cas où le processus $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est lui-même construit, comme il est décrit à l'alinéa précédent, au moyen d'une équation d'évolution, on distinguera les processus aléatoires $(V_0, V_1, \dots, V_k, \dots)$ et $(W_0, W_1, \dots, W_k, \dots)$ en appelant le premier bruit d'évolution et le second bruit d'observation.

REMARQUE

On constate donc que le formalisme général des processus aléatoires à commande, introduit à l'alinéa I,1, permet de décrire aussi bien les «processus d'état» que les «processus d'observation» habituellement considérés dans les ouvrages sur la commande des processus en temps discret (voir de nouveau **Striabel** [26] et **Aoki** [1], etc...).



II - BOUCLAGE (ou FEEDBACK)

II,1. Commande bouclée

Soit $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ un processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

On appelle *fonction de commande à l'instant k* une application mesurable α_k :

$$\alpha_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^k \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

et *bouclage* une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ de fonctions de commande aux instants $1, 2, \dots, k, \dots$.

S'il est nécessaire de préciser les espaces $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ choisis on dira que le bouclage est défini sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à valeurs dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Un bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ étant choisi, on peut construire, à partir du processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$, un processus aléatoire ordinaire $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$ en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0(\omega) = X_0(\omega) \\ \bar{X}_1(\omega) = X_1[\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega))] \\ \dots \dots \dots \\ \bar{X}_k(\omega) = X_k[\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega)), \dots, \alpha_k(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}(\omega))] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

En cas de confusion possible, on peut préciser le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ choisi au moyen de la notation :

$$\bar{X}_0, \bar{X}_1^{(\alpha_1)}, \bar{X}_2^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \dots, \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}, \dots$$

(seules les k fonctions de commande $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ interviennent dans la construction de $\bar{X}_k$).

Le processus aléatoire ordinaire $\{\bar{X}_k\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ ainsi obtenu sera appelé *processus aléatoire à commande bouclée* associé au processus aléatoire à commande $\{X_k\}$ (au moyen du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$).

On peut donner de la construction précédente l'interprétation pratique suivante : à chaque instant k on dispose des k valeurs prises aux instants précédents : $0, 1, 2, \dots, k-1$ par le processus $\{\bar{X}_j\}$ et on choisit alors, en fonction de ces données, et une fois pour toutes, la k -ième commande u_k .

II,2. Commande adaptée à un processus aléatoire à commande

Soit $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j, \dots)$ un processus aléatoire à commande défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et d'horizon au moins égal à $k-1$. Soit X_k une variable aléatoire à k commandes également définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, mais à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

On a vu à l'alinéa II,1 qu'on peut associer à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j, \dots)$ un processus aléatoire à commande bouclée $(\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_j, \dots)$ en choisissant un bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots)$ sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et à valeurs dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_0(\omega) = Y_0(\omega) \\ \bar{Y}_1(\omega) = Y_1[\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega))] \\ \dots\dots\dots \\ \bar{Y}_{k-1}(\omega) = Y_{k-1}[\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega)), \dots, \alpha_{k-1}(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_{k-2}(\omega))] \end{array} \right.$$

Au moyen du même bouclage, on peut aussi associer à la variable aléatoire à k commandes X_k une variable aléatoire ordinaire $\bar{X}_k$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, en posant :

$$\bar{X}_k(\omega) = X_k[\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega)), \dots, \alpha_k(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_{k-1}(\omega))]$$

Cette variable aléatoire sera appelée *variable aléatoire à k commandes adaptées au processus* $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_{k-1})$ (au moyen du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$).

On peut considérer qu'il s'agit là d'une extension aux variables aléatoires à k commandes de la notion de variable aléatoire à commande adaptée à la variable Y , définie au paragraphe II du chapitre 1.

Plus généralement, si $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est un processus aléatoire à commande défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et d'horizon au plus égal à celui du processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j, \dots)$ plus un, on peut lui associer, toujours au moyen du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ un processus aléatoire ordinaire $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$ appelé *processus aléatoire à commande adaptée au processus* $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j, \dots)$, en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0(\omega) = X_0(\omega) \\ \bar{X}_1(\omega) = X_1[\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega))] \\ \dots\dots\dots \\ \bar{X}_k(\omega) = X_k[\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega)), \dots, \alpha_k(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_{k-1}(\omega))] \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Là encore on peut utiliser les notations $\bar{X}_0, \bar{X}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}, \dots$ s'il est nécessaire de préciser le bouclage choisi.

On remarque qu'un processus aléatoire à commande bouclée peut être considéré comme un processus aléatoire à commande adaptée à lui-même.

La construction précédente a une interprétation pratique analogue à celle donnée pour la commande bouclée : à chaque instant k on dispose des k valeurs antérieures du processus $\{\bar{Y}_j\}$, (mais non de celles du processus $\{\bar{X}_j\}$) et on choisit en fonction de ces données, et définitivement, la k -ième commande u_k à la fois pour le processus $\{\bar{X}_j\}$ et pour le processus $\{\bar{Y}_j\}$.

Un cas très répandu est celui où le processus aléatoire à commande $\{Y_j\}$ est construit à partir du processus aléatoire à commande $\{X_j\}$ au moyen d'une équation d'observation, comme il est décrit en I,3. C'est pourquoi il sera souvent commode d'annoncer implicitement notre intention d'adapter la commande de $\{X_j\}$ (ou d'un autre processus de mêmes espaces de probabilité et de commande) à $\{Y_j\}$ en appelant $\{X_j\}$ *processus d'état* et $\{Y_j\}$ *processus d'observation*.



III - SUITE RÉGULIÈRE DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ASSOCIÉE A UN PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE

L'objet de ce paragraphe est d'étendre au cas des processus aléatoires à commande les définitions et les résultats donnés, pour les variables aléatoires à commande, au paragraphe III du chapitre 1.

Considérons un processus aléatoire à commande, $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ (à horizon fini ou infini), défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, à commandes dans l'espace mesurable $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

On appelle *suite régulière de probabilités conditionnelles* associée au processus $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ une suite $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ de probabilités de transitions, P^k étant une transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$, telles que, pour tout $A \in \mathcal{X}$, $F \in \mathcal{F}$ on ait :

$$1 - \int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] P^0 [X_0(\omega); F] P(d\omega)$$

ce qui signifie que P^0 constitue une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire X_0 (cf. annexe, paragraphe V).

2 - quels que soient $k = 1, 2, 3 \dots$ et $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k)] 1_F(\omega) P^{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k)] P^k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k), u_1, u_2, \dots, u_k; F] \\ & \quad P^{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \end{aligned}$$

ce qui signifie que $P^k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k; \cdot]$ constitue une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire $X_k[\cdot, u_1, u_2, \dots, u_k]$ lorsque $(\Omega, \mathcal{F})$ est muni de la probabilité : $P^{k+1}[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; \cdot]$.

Le lemme III,2 et le théorème III,4.1 du paragraphe III du chapitre 1 permettent d'établir facilement le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME III,1 (d'existence)

Soit Ω un espace muni d'une σ -algèbre $\mathcal{F}$ engendrée par une famille dénombrable $\mathcal{F}_0$, et d'une probabilité P possédant sur une classe compacte $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, la propriété d'approximation :

$$P(F) = \sup \{ P(K) ; K \subset F, K \in \mathcal{H} \}$$

pour tout $F \in \mathcal{F}$ (c'est-à-dire «régulière» relativement à la classe $\mathcal{H}$; cf. Meyer [21], III.28, p. 74).

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables. On suppose $\mathcal{X}$ engendrée par une famille dénombrable.

Considérons un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(U, \mathcal{U})$, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Il existe alors une suite $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ de probabilités de transitions :

$$P^k : (X, \mathcal{X})^{k+1} \times (U, \mathcal{U})^k \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

une algèbre dénombrable $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, et une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ telles que :

1 - les probabilités de transition $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ constituent une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ (au sens de la définition précédente).

2 - l'algèbre dénombrable $\mathcal{H} = \{F_1, F_2, \dots, F_n, \dots\}$ engendre la σ -algèbre $\mathcal{F}$.

3 - pour tout $F_n \in \mathcal{H}$, il existe une suite croissante $\{C_m^n ; m = 1, 2, 3, \dots\}$ d'éléments de la classe compacte $\mathcal{C}$, contenus dans F_n , telle que, quels que soient $k = 0, 1, 2, \dots$ et $x_0, x_1, \dots, x_k \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ on ait :

$$\begin{aligned} P^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; F_n) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} P^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; C_m^n) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

D'après le lemme III.2 du chapitre 1, il existe une algèbre dénombrable $\mathcal{H}$ engendrant $\mathcal{F}$ et une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ telles que, à tout $F_n \in \mathcal{H}$ on puisse associer une suite croissante $\{C_m^n ; m = 1, 2, 3, \dots\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ contenus dans F_n telle que :

$$P(F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m^n)$$

D'après la première partie du corollaire III.4.2 du chapitre 1, il existe une probabilité de transition P^0 de $(X, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que ;

1 - pour tout $A \in \mathcal{X}$, $F \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A[X_0(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A[X_0(\omega)] P^0[X_0(\omega) ; F] P(d\omega) \end{aligned}$$

2 - pour tout $F_n \in \mathcal{H}$ et tout $x \in X$:

$$P^0(x ; F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P^0(x ; C_m^n)$$

D'autre part, étant donné, pour $k \geq 1$, une probabilité de transition P^{k-1} de $(X, \mathcal{X})^k \times (U, \mathcal{U})^{k-1}$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

3 - pour tout $F_n \in \mathcal{H}$ et tous $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{U}$ on ait :

$$\begin{aligned} & P^{k-1} (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; F_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P^{k-1} (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; C_m^n) \end{aligned}$$

il existe une probabilité de transition P^k de $(\mathbb{X}, \mathcal{X})^{k-1} \times (\mathbb{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

4 - pour tous $A \in \mathcal{X}$, $F \in \mathcal{F}$, $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k)] 1_F(\omega) P^{k-1} [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; d\omega] \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k)] \\ & \quad P^k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k; F] \\ & \quad P^{k-1} (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; d\omega) \end{aligned}$$

5 - pour tout $F_n \in \mathcal{H}$, tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} & P^k (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; F_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P^k (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; C_m^n) \end{aligned}$$

Pour s'en assurer, il suffit d'appliquer le théorème III,4.1 du chapitre 1 en posant :

$$(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}) = (\mathbb{X}, \mathcal{X})^k \times (\mathbb{U}, \mathcal{U})^k$$

et en considérant :

- X_k comme une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ particulière
- P^{k-1} comme une probabilité de transition de $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ particulière.

Dans ces conditions, il est clair qu'on peut construire par récurrence une suite $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ de probabilités de transition ayant les propriétés annoncées dans le théorème.

C.Q.F.D.

REMARQUE

Comme on l'a déjà noté dans la remarque II,2.1 du chapitre 1, les hypothèses concernant l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans l'énoncé du théorème précédent sont réunies dès que Ω est un espace polonais muni de sa σ algèbre de Borel.



IV - CONSTRUCTION D'ESPÉRANCES OU DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES PAR RAPPORT

A UN PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE BOUCLÉE

Les théorèmes IV,1.2 et IV,2.1 du chapitre I peuvent être étendus de la façon suivante aux processus aléatoires à commande :

THEOREME IV,1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soient $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables. Soit $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ un processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Supposons qu'il existe une suite régulière de probabilités conditionnelles $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ associée à ce processus $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ (selon la définition du paragraphe III),

Choisissons un bouclage, c'est-à-dire une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ d'applications mesurables :

$$\alpha_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^k \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

et considérons le processus aléatoire à commande bouclée correspondant, $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$ défini par :

$$\begin{cases} \bar{X}_0(\omega) = X_0(\omega) & \text{et pour } k = 1, 2, 3, \dots : \\ \bar{X}_k(\omega) = X_k[\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega)), \dots, \alpha_k(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}(\omega))] \end{cases}$$

1 - Soit L_{k+1} une variable aléatoire à $k+1$ commandes, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs réelles positives, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et soit $\bar{L}_{k+1}$ la variable aléatoire à $k+1$ commandes adaptées au processus $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ au moyen du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ donc définie par :

$$\begin{aligned} \bar{L}_{k+1}(\omega) = & L_{k+1}[\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega)), \dots, \\ & \alpha_k(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}(\omega)), \alpha_{k+1}(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_k(\omega))] \end{aligned}$$

Soit M_{k+1} la fonction réelle positive mesurable définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ en posant :

$$\begin{aligned} M_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ = \int_{\Omega} L_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) P^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \end{aligned}$$

pour tous $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$.

Alors, quel que soit le choix du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$, la variable aléatoire réelle positive $\bar{M}_{k+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} \bar{M}_{k+1}(\omega) = & M_{k+1}[\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_k(\omega), \\ & \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \alpha_2(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega)), \dots, \alpha_{k+1}(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_k(\omega))] \end{aligned}$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ \bar{L}_{k+1} / \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \right\}$$

2 - En particulier, quel que soit le choix du bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, si on pose :

$$\begin{aligned} \bar{P}^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k; F) \\ = P^k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0, x_1), \dots, \alpha_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}); F] \end{aligned}$$

pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, alors la probabilité de transition $\bar{P}^k$ de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1}$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ ainsi définie constitue une probabilité conditionnelle régulière par rapport aux $k+1$ variables aléatoires $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$.

DEMONSTRATION :

Remarquons d'abord que pour montrer la deuxième partie du théorème, il suffit de montrer la première puis de l'appliquer en prenant :

$$L_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) = 1_F(\omega) \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{F}$$

Or, d'après le théorème IV.1.2 du chapitre 1, cette première partie est au moins vraie pour $k=0$. Pour montrer qu'elle l'est encore pour $k \geq 1$ nous raisonnerons par récurrence.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_k$ $k+1$ éléments de la σ -algèbre $\mathcal{X}$. Considérons l'intégrale :

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} 1_{A_0}[\bar{X}_0(\omega)] 1_{A_1}[\bar{X}_1(\omega)] \dots 1_{A_k}[\bar{X}_k(\omega)] \bar{L}_{k+1}(\omega) P(d\omega)$$

Le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ étant fixé, posons, pour tout $\omega \in \Omega$, $x_0 \in \mathcal{X}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_1(\omega, x_0) = X_1[\omega, \alpha_1(x_0)] \\ \tilde{X}_2(\omega, x_0) = X_2[\omega, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0, \tilde{X}_1(\omega, x_0))] \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{X}_k(\omega, x_0) = X_k[\omega, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0, \tilde{X}_1(\omega, x_0)), \dots, \alpha_k(x_0, \tilde{X}_1(\omega, x_0), \dots, \tilde{X}_{k-1}(\omega, x_0))] \end{array} \right.$$

et :

$$\tilde{L}_{k+1}(\omega, x_0) = L_{k+1}[\omega, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0, \tilde{X}_1(\omega, x_0)), \dots, \alpha_{k+1}(x_0, \tilde{X}_1(\omega, x_0), \dots, \tilde{X}_k(\omega, x_0))]$$

On remarque que, pour tout $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\bar{X}_j(\omega) = \tilde{X}_j[\omega, X_0(\omega)]$$

et que :

$$\bar{L}_{k+1}(\omega) = \tilde{L}_{k+1}[\omega, X_0(\omega)]$$

Appliquons alors le lemme IV.1.1 du chapitre 1 à la fonction réelle positive mesurable λ_1 définie sur $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ par :

$$\lambda_1(\omega, x_0) = 1_{A_0}(x_0) 1_{A_1}[\tilde{X}_1(\omega, x_0)] \dots 1_{A_k}[\tilde{X}_k(\omega, x_0)] \tilde{L}_{k+1}(\omega, x_0)$$

On obtient :

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{X}} P X_0^{-1}(dx_0) 1_{A_0}(x_0)$$

$$(IV.1) \quad \int_{\Omega} 1_{A_1}[\tilde{X}_1(\omega, x_0)] 1_{A_2}[\tilde{X}_2(\omega, x_0)] \dots 1_{A_k}[\tilde{X}_k(\omega, x_0)] \tilde{L}_{k+1}(\omega, x_0) P^0(x_0; d\omega)$$

On remarque alors que l'intégrale :

$$\tilde{J}(x_0) = \int 1_{A_1} [\tilde{X}_1(\omega, x_0)] \dots 1_{A_k} [\tilde{X}_k(\omega, x_0)] \tilde{L}_{k+1}(\omega, x_0) P^0(x_0; d\omega)$$

est, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$ fixé, tout à fait analogue à l'intégrale J , à la différence près qu'elle comporte k indicatrices d'ensembles mesurables appartenant à $\mathcal{X}$, au lieu de $k+1$:

Pour mettre ce fait davantage en évidence, fixons $x_0 \in \mathcal{X}$ et adoptons les notations suivantes. On posera :

1 - pour tout $F \in \mathcal{F}$:

$$\Pi(F) = P^0(x_0; F)$$

2 - pour tout $\omega \in \Omega$ et tous $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^*(\omega) = X_1[\omega, \alpha_1(x_0)] \\ X_1^*(\omega, u_1) = X_2[\omega, \alpha_1(x_0), u_1] \\ \dots\dots\dots \\ X_{k-1}^*(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = X_k[\omega, \alpha_1(x_0), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}] \end{array} \right.$$

et :

$$L_k^*(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) = L_{k+1}[\omega, \alpha_1(x_0), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k]$$

3 - pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0^*(\omega) = \tilde{X}_1(\omega, x_0) \\ \bar{X}_1^*(\omega) = \tilde{X}_2(\omega, x_0) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{X}_{k-1}^*(\omega) = \tilde{X}_k(\omega, x_0) \end{array} \right.$$

et :

$$\bar{L}_k^*(\omega) = \tilde{L}_{k+1}(\omega, x_0)$$

4 - pour tous $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathcal{X}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^*(\xi_0) = \alpha_2(x_0, \xi_0) \\ \alpha_2^*(\xi_0, \xi_1) = \alpha_3(x_0, \xi_0, \xi_1) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{k-1}^*(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}) = \alpha_k(x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}) \\ \alpha_k^*(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \alpha_{k+1}(x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \end{array} \right.$$

Il est clair que $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_{k-1}^*)$ constitue un processus aléatoire à commande défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et que $(\bar{X}_0^*, \bar{X}_1^*, \dots, \bar{X}_{k-1}^*)$ est le processus aléatoire à commande bouclée associé au moyen du bouclage $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{k-1}^*)$, puisque pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0^*(\omega) = X_0^*(\omega) \\ \bar{X}_1^*(\omega) = X_1^*[\omega, \alpha_1^*(\bar{X}_0^*(\omega))] \\ \dots\dots\dots \\ \bar{X}_{k-1}^*(\omega) = X_{k-1}^*[\omega, \alpha_1^*(\bar{X}_0^*(\omega)), \dots, \alpha_{k-1}^*(\bar{X}_0^*(\omega), \bar{X}_1^*(\omega), \dots, \bar{X}_{k-2}^*(\omega))] \end{array} \right.$$

De même L_k^* est une variable aléatoire réelle positive à k commandes, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et $\bar{L}_k^*$ est la variable aléatoire à k commandes adaptées au processus $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_{k-1}^*)$, qu'on lui associe au moyen du bouclage $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{k-1}^*, \alpha_k^*)$ car pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\bar{L}_k^*(\omega) = L_k^*[\omega, \alpha_1^*(\bar{X}_0^*(\omega)), \dots, \alpha_k^*(\bar{X}_0^*(\omega), \bar{X}_1^*(\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}^*(\omega))]$$

Considérons alors la suite de probabilités de transition $\Pi^0, \Pi^1, \dots, \Pi^{k-1}$ définies en posant pour tous $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi^0(\xi_0; F) = P^1[x_0, \xi_0, \alpha_1(x_0); F] \\ \Pi^1(\xi_0, \xi_1, u_1; F) = P^2[x_0, \xi_0, \xi_1, \alpha_1(x_0), u_1; F] \\ \dots\dots\dots \\ \Pi^{k-1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; F) \\ = P^k[x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \alpha_1(x_0), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; F] \end{array} \right.$$

Cette suite constitue une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_{k-1}^*)$. En effet, $P^0, P^1, \dots, P^k$ constituant, par hypothèse, une suite régulière de probabilités conditionnelles associées au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ il est clair que, pour tout $A \in \mathcal{X}$ et tout $F \in \mathcal{F}$:

1 -

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A[X_0^*(\omega)] 1_F(\omega) \Pi(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A[X_0^*(\omega)] \Pi^0[X_0^*(\omega); F] \Pi(d\omega) \end{aligned}$$

2 - quels que soient $j = 1, 2, \dots, k-1$ et $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1} \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A[X_j^*(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j)] 1_F(\omega) \\ & \quad \Pi^{j-1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A[X_j^*(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ & \quad \Pi^j(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, X_j^*(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j), u_1, u_2, \dots, u_j; F) \\ & \quad \Pi^{j-1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega) \end{aligned}$$

Supposons alors la première partie du théorème vraie pour $k-1$. On peut l'appliquer au processus aléatoire à commande $X_0^*, X_1^*, \dots, X_{k-1}^*$ et à la variable aléatoire à k commandes L_k^* . Si on pose, pour tous $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in \mathcal{U}$:

$$M_k^* (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) \\ = \int_{\Omega} L_k^* (\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) \pi^{k-1} (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; d\omega)$$

alors la variable aléatoire réelle positive $\bar{M}_k^*$ définie par :

$$\bar{M}_k^* (\omega) = M_k^* [\bar{X}_0^* (\omega), \bar{X}_1^* (\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}^* (\omega), \\ \alpha_1^* (\bar{X}_0^* (\omega)), \dots, \alpha_k^* (\bar{X}_0^* (\omega), \bar{X}_1^* (\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}^* (\omega))]$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$\frac{E}{\pi} \left\{ L_k^* / \bar{X}_0^*, \bar{X}_1^*, \dots, \bar{X}_{k-1}^* \right\}$$

(lorsque $(\Omega, \mathcal{F})$ est muni de la probabilité π).

On a donc, quels que soient $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{X}$:

$$(IV.2) \quad \int_{\Omega} 1_{A_1} [\bar{X}_0^* (\omega)] 1_{A_2} [\bar{X}_1^* (\omega)] \dots 1_{A_k} [\bar{X}_{k-1}^* (\omega)] \bar{L}_k^* (\omega) \pi(d\omega) \\ = \int_{\Omega} 1_{A_1} [\bar{X}_0^* (\omega)] 1_{A_2} [\bar{X}_1^* (\omega)] \dots 1_{A_k} [\bar{X}_{k-1}^* (\omega)] \bar{M}_k^* (\omega) \pi(d\omega)$$

Remarquons que, par construction :

$$M_k^* (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = M_{k+1} [x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \alpha_1(x_0), u_1, u_2, \dots, u_k]$$

quels que soient $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$.

Par suite si on pose, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x_0 \in \mathcal{X}$:

$$\tilde{M}_{k+1} (\omega, x_0) = M_{k+1} \left\{ x_0, \tilde{X}_1 (\omega, x_0), \tilde{X}_2 (\omega, x_0), \dots, \tilde{X}_k (\omega, x_0), \right. \\ \left. \alpha_1 (x_0), \alpha_2 [x_0, \tilde{X}_1 (\omega, x_0)], \dots, \alpha_{k+1} [x_0, \tilde{X}_1 (\omega, x_0), \dots, \tilde{X}_k (\omega, x_0)] \right\}$$

on a simplement :

$$M_k^* (\omega) = \tilde{M}_{k+1} (\omega, x_0)$$

Il devient clair que l'égalité (IV.2) s'écrit :

$$(IV.3) \quad \tilde{J} (x_0) = \int_{\Omega} 1_{A_1} [\tilde{X}_1 (\omega, x_0)] 1_{A_2} [\tilde{X}_2 (\omega, x_0)] \dots 1_{A_k} [\tilde{X}_k (\omega, x_0)] \\ \tilde{M}_{k+1} (\omega, x_0) P^0 (x_0; d\omega)$$

Rappelons alors que l'égalité (IV.1) s'écrit :

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{X}} 1_{A_0}(x_0) \tilde{\mathcal{J}}(x_0) P_{X_0}^{-1}(dx_0)$$

En appliquant à nouveau le lemme IV.1.1 du chapitre 1, mais cette fois à la fonction réelle positive mesurable λ_2 définie sur $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ par :

$$\lambda_2(\omega, x_0) = 1_{A_0}(x_0) 1_{A_1}[\tilde{X}_1(\omega, x_0)] \dots 1_{A_k}[\tilde{X}_k(\omega, x_0)] \tilde{M}_{k+1}(\omega, x_0)$$

et en remarquant que :

$$\tilde{M}_{k+1}[\omega, X_0(\omega)] = \overline{M}_{k+1}(\omega)$$

on obtient, d'après (IV.3):

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} 1_{A_0}[\overline{X}_0(\omega)] 1_{A_1}[\overline{X}_1(\omega)] \dots 1_{A_k}[\overline{X}_k(\omega)] \overline{M}_{k+1}(\omega) P(d\omega)$$

La classe des ensembles :

$$\{ \overline{X}_0^{-1}(A_0) \cap \overline{X}_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \overline{X}_k^{-1}(A_k) \quad ; \quad A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X} \}$$

est stable par intersection finie (et contient en particulier Ω) et engendre la plus petite σ -algèbre rendant mesurables les applications $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_k$, soit :

$$\overline{X}_0^{-1}(\mathcal{X}) \vee \overline{X}_1^{-1}(\mathcal{X}) \vee \dots \vee \overline{X}_k^{-1}(\mathcal{X}) = \sigma \{ \overline{X}_0, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_k \}$$

D'après le lemme V.1 de l'annexe, l'égalité que l'on vient de montrer assure donc que $\overline{M}_{k+1}$, qui est par construction $\sigma \{ \overline{X}_0, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_k \}$ -mesurable, est bien un représentant de :

$$E \{ \overline{L}_{k+1} \mid \overline{X}_0, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_k \}$$

si $\overline{L}_{k+1}$ est bornée (ce qui assure que $\overline{L}_{k+1}$ est intégrable). D'après les propriétés de convergence monotone de l'intégrale et de l'espérance conditionnelle, le résultat subsiste pour $\overline{L}_{k+1}$ positive mesurable quelconque.

On a donc montré que si la première partie du théorème est vraie pour $k-1$ elle l'est encore pour k . Comme elle l'est pour 0 elle est donc vraie pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$

C.Q.F.D.



V - ESPÉRANCES ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES « UNIVERSELLES » POUR UNE VARIABLE ALÉATOIRE A COMMANDE, RELATIVEMENT A UN PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE

V,1. Définition

Soit $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$ un processus aléatoire à commande, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Soient L_{k+1} et X_{k+1} deux variables aléatoires à $k+1$ commandes, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs respectivement dans $\overline{\mathcal{R}}^+$ et dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Etant donné un bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ défini sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et à valeurs dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ on désigne par $(\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k, \dots)$ le processus aléatoire à commande bouclée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{Y}_0(\omega) = Y_0(\omega) \\ \overline{Y}_1(\omega) = Y_1[\omega, \alpha_1(\overline{Y}_0(\omega))] \\ \dots\dots\dots \\ \overline{Y}_k(\omega) = Y_k[\omega, \alpha_1(\overline{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_k(\overline{Y}_0(\omega), \overline{Y}_1(\omega), \dots, \overline{Y}_{k-1}(\omega))] \end{array} \right.$$

et par $\overline{L}_{k+1}$ et $\overline{X}_{k+1}$ les variables aléatoires à $k+1$ commandes adaptées à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$:

$$\begin{aligned} \overline{L}_{k+1}(\omega) &= L_{k+1}[\omega, \alpha_1(\overline{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_{k+1}(\overline{Y}_0(\omega), \overline{Y}_1(\omega), \dots, \overline{Y}_k(\omega))] \\ \overline{X}_{k+1}(\omega) &= X_{k+1}[\omega, \alpha_1(\overline{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_{k+1}(\overline{Y}_0(\omega), \overline{Y}_1(\omega), \dots, \overline{Y}_k(\omega))] \end{aligned}$$

On dit qu'une fonction réelle positive mesurable M_{k+1} définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ constitue, pour L_{k+1} , une *espérance conditionnelle universelle* relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ si, quel que soit le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ choisi, la variable aléatoire réelle positive :

$$M_{k+1}[\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k, \alpha_1(\overline{Y}_0), \alpha_2(\overline{Y}_0, \overline{Y}_1), \dots, \alpha_{k+1}(\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k)]$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \{ \overline{L}_{k+1} / \overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k \}$$

On dit qu'une probabilité de transition Q^k de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ constitue, pour X_{k+1} , une *probabilité conditionnelle universelle* relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ si quel que soit $A \in \mathcal{X}$, la fonction réelle positive mesurable définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ par :

$$Q^k(\cdot; A)$$

est une espérance conditionnelle universelle pour $1_A[X_{k+1}]$ relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ autrement dit si, quel que soit le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ choisi, la probabilité de transition $\overline{Q}_k$

de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ définie en posant pour tous $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} & \bar{Q}^k (y_0, y_1, \dots, y_k ; A) \\ &= Q^k [y_0, y_1, \dots, y_k, \alpha_1(y_0), \alpha_2(y_0, y_1), \dots, \alpha_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k); A] \end{aligned}$$

est une probabilité conditionnelle régulière pour $\bar{X}_{k+1}$ relativement à $\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k$.

V.2. Exemples : cas où il existe une suite régulière de probabilités conditionnelles

Supposons qu'il existe une suite régulière $P^0, P^1, \dots, P^k$ de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$. Alors, d'après le théorème IV.1 :

1 - la fonction réelle positive mesurable M_{k+1} définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ en posant :

$$\begin{aligned} & M_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ &= \int_{\Omega} L_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) P^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \end{aligned}$$

pour tous $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, est une espérance conditionnelle universelle pour la variable aléatoire réelle positive à $k+1$ commandes L_{k+1} relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

2 - la probabilité de transition $\tilde{P}^k$ de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ définie en posant, pour $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \tilde{P}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; \cdot) \\ &= P^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; \cdot) \end{aligned}$$

(c'est-à-dire la probabilité de transition P^k , considérée comme une transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ particulière) est une probabilité conditionnelle universelle pour la variable aléatoire à valeur dans $(\Omega, \mathcal{F})$, définie par l'application identique : $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightsquigarrow \omega \in (\Omega, \mathcal{F})$ (et considérée comme une variable aléatoire à $k+1$ commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ particulière).

3 - la probabilité de transition Q^k de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ définie en posant pour $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} & Q^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; A) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] P^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \end{aligned}$$

est une probabilité conditionnelle universelle pour la variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que les propriétés 1 et 2 ne sont autres que les conclusions 1 et 2 du théorème IV.1, énoncées sous une autre forme, et que la propriété 3 se déduit immédiatement de la propriété 1 en faisant $L_{k+1} = 1_A [X_{k+1}]$, après avoir vérifié que, d'après le corollaire III.5 de l'annexe, Q^k est bien une probabilité de transition du type annoncé.

V.3. Construction d'espérances ou de probabilités conditionnelles universelles

LEMME V.3.1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et à valeurs respectivement dans les espaces mesurables $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Supposons qu'il existe une probabilité conditionnelle régulière pour X relativement à Y , soit :

$$Q : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

Soit ρ une fonction réelle positive mesurable définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Alors on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho [X(\omega), Y(\omega)] P(d\omega) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) \int_{\mathcal{X}} \rho(x, y) Q(y; dx) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

D'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, il suffit de montrer la conclusion du lemme dans le cas particulier où ρ est l'indicatrice : 1_H d'un ensemble H de la σ -algèbre produit :

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}.$$

Posons, pour tout $H \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \pi_1(H) &= \int_{\Omega} 1_H [X(\omega), Y(\omega)] P(d\omega) \\ \pi_2(H) &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) \int_{\mathcal{X}} 1_H(x, y) Q(y; dx) \end{aligned}$$

D'après le corollaire III.3 de l'annexe et le corollaire III.5 de l'annexe π_1 et π_2 sont deux probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Soient $A \in \mathcal{X}$ et $B \in \mathcal{Y}$. Par définition $Q[Y(\cdot); A]$ est un représentant de l'espérance conditionnelle $E \{ 1_A [X] / Y \}$.

Par suite :

$$\begin{aligned} \pi_2(A \times B) &= \int_{\mathcal{Y}} P Y^{-1}(dy) \int_{\mathcal{X}} 1_A(x) 1_B(y) Q(y; dx) \\ &= \int_{\Omega} 1_B[Y(\omega)] Q[Y(\omega); A] P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_B[Y(\omega)] 1_A[X(\omega)] P(d\omega) \\ &= \pi_1(A \times B) \end{aligned}$$

Les probabilités π_1 et π_2 coïncident donc sur la classe des pavés mesurables :

$$\{ A \times B \quad ; \quad A \in \mathcal{X} , \quad B \in \mathcal{Y} \}$$

qui engendre, par définition, la σ -algèbre $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ et qui est stable par intersection finie. D'après le corollaire II.2 de l'annexe π_1 et π_2 coïncident donc sur $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

C.Q.F.D.

REMARQUE

Dans le cas particulier où $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = (\Omega, \mathcal{F})$ et où X est l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$, le lemme V.3.1 n'est autre que le lemme IV.1.1 du chapitre 1 (les deux démonstrations sont d'ailleurs très semblables).



Le théorème suivant permet d'envisager la construction d'espérances ou de probabilités conditionnelles universelles sans avoir recours, comme dans les exemples de l'alinéa V.2, à une suite régulière de probabilités conditionnelles (dont le calcul pratique peut s'avérer très compliqué).

Il généralise en quelque sorte la première partie du lemme V.3 de l'annexe, la deuxième partie de ce lemme ayant déjà été étendue aux variables aléatoires à commande par le théorème IV.1.2 du chapitre 1 et aux processus aléatoires à commande par le théorème IV.1.

THÉORÈME V.3.2.

Supposons définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un processus aléatoire à commande : $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k \dots)$ à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et une variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Supposons que X_{k+1} admette une probabilité conditionnelle universelle par rapport au processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, soit :

$$Q^k : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

1 - Soit φ_{k+1} une fonction réelle positive mesurable définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$. La variable aléatoire réelle positive à $k+1$ commandes L_{k+1} définie en posant pour tous $\omega \in \Omega$ et $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} L_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ = \varphi_{k+1} [Y_0(\omega), Y_1(\omega, u_1), \dots, Y_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k), \\ X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}), u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}] \end{aligned}$$

admet, relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ une espérance conditionnelle universelle M_{k+1} définie en posant pour tous $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} M_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ = \int_{\mathcal{X}} \varphi_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ Q^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; dx_{k+1}) \end{aligned}$$

2 - Soit $(Z, \mathcal{Z})$ un espace mesurable et g_{k+1} une application mesurable de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(Z, \mathcal{Z})$.

La variable aléatoire à $k+1$ commandes Z_{k+1} définie en posant pour tous $\omega \in \Omega$ et $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} Z_{k+1} & (\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}) \\ &= g_{k+1} [Y_0(\omega), Y_1(\omega, u_1), \dots, Y_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k), \\ & \quad X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}), u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}] \end{aligned}$$

admet alors, relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ une probabilité conditionnelle universelle R^k définie en posant pour tous $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $C \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} R^k & (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; C) \\ &= \int_{\mathcal{X}} 1_C [g_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1})] \\ & \quad Q^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; dx_{k+1}) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

Remarquons d'abord que, d'après le corollaire III.5 de l'annexe, R^k est bien une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(Z, \mathcal{Z})$. La deuxième partie du théorème apparaît alors comme une conséquence de la première, qu'il suffit d'appliquer en prenant :

$$\mathcal{Y}_{k+1}(\cdot) = 1_C [g_{k+1}(\cdot)]$$

Montrons cette première partie.

Considérons un bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})$ défini sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et à valeurs dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et désignons par :

$-(\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_j, \dots, \bar{Y}_k)$ le processus aléatoire à commande bouclée, définie en posant pour $j=0, 1, 2, \dots, k$ et $\omega \in \Omega$:

$$\bar{Y}_j(\omega) = Y_j [\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_j(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_{j-1}(\omega))]$$

$-\bar{X}_{k+1}$ la variable aléatoire à $k+1$ commandes adaptées à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ définie en posant pour $\omega \in \Omega$:

$$\bar{X}_{k+1}(\omega) = X_{k+1} [\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_{k+1}(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_k(\omega))]$$

$-\bar{L}_{k+1}$ la variable aléatoire réelle positive à $k+1$ commandes adaptées à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, définie en posant pour $\omega \in \Omega$:

$$\bar{L}_{k+1}(\omega) = L_{k+1} [\omega, \alpha_1(\bar{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_{k+1}(\bar{Y}_0(\omega), \bar{Y}_1(\omega), \dots, \bar{Y}_k(\omega))]$$

Posons par ailleurs, pour $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $x_{k+1} \in \mathcal{X}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1}) &= \mathcal{Y}_{k+1}[y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \alpha_1(y_0), \dots, \alpha_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k)] \\ \tilde{M}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k) &= M_{k+1}[y_0, y_1, \dots, y_k, \alpha_1(y_0), \dots, \alpha_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k)] \\ \bar{Q}^k(y_0, y_1, \dots, y_k; A) &= Q^k[y_0, y_1, \dots, y_k, \alpha_1(y_0), \dots, \alpha_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_k); A] \end{aligned}$$

On remarque que, par construction :

$$\bar{L}_{k+1} = \tilde{\varphi}_{k+1} [\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{x}_{k+1}]$$

et, pour tous $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$:

$$\tilde{M}_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_k) = \int_{\mathcal{X}} \tilde{\varphi}_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1}) \bar{Q}^k (y_0, y_1, \dots, y_k; dx_{k+1})$$

Soit G un élément quelconque de la $\mathcal{T}$ -algèbre produit $\mathcal{Y}^{k+1}$. $\bar{Q}^k$ étant par hypothèse une probabilité conditionnelle régulière pour $\bar{x}_{k+1}$ par rapport à $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$, on peut appliquer le lemme V.3.1 à la fonction réelle positive mesurable ρ définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1}$ en posant :

$$\rho (x_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_k) = 1_G (y_0, y_1, \dots, y_k) \tilde{\varphi}_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_k, x_{k+1})$$

quels que soient $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$ et $x_{k+1} \in \mathcal{X}$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_G [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega)] \tilde{\varphi}_{k+1} [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega), \bar{x}_{k+1}(\omega)] P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} P(d\omega) 1_G [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega)] \\ & \quad \int_{\mathcal{X}} \tilde{\varphi}_{k+1} [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega), x_{k+1}] \\ & \quad \bar{Q}^k [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega) ; dx_{k+1}] \\ &= \int_{\Omega} 1_G [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega)] \tilde{M}_{k+1} [\bar{y}_0(\omega), \bar{y}_1(\omega), \dots, \bar{y}_k(\omega)] P(d\omega) \end{aligned}$$

On en déduit que $\tilde{M}_{k+1} [\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k]$, c'est-à-dire $M_{k+1} [\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \alpha_1(\bar{y}_0), \dots, \alpha_{k+1}(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)]$ est bien un représentant de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ \bar{L}_{k+1} / \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k \right\}$$

C.Q.F.D.



VI - PROCESSUS DE MARKOV A COMMANDE

VI,1. Définition

La notion de probabilité conditionnelle universelle va nous permettre de définir de façon précise la propriété de Markov pour des processus aléatoires à commande.

Considérons donc un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

On dira que ce processus aléatoire à commande est *markovien* (ou de Markov) s'il existe, à tout instant $k = 0, 1, 2, \dots$, une probabilité de transition :

$$Q^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

qui, considérée comme une probabilité de transition :

$$\tilde{Q}^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

particulière, en posant pour tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^k (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; A) \\ = Q^k (x_k, u_{k+1} ; A) \end{aligned}$$

constitue, pour la variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} , une probabilité conditionnelle universelle relativement au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ (selon la définition de V.1).

D'après ce qu'on a déjà remarqué en V.2, s'il existe une suite régulière de probabilités conditionnelles : $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ associée au processus $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$, pour que ce dernier soit markovien, il suffit que, pour tout $k = 0, 1, \dots$ et tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $A \in \mathcal{X}$ l'intégrale :

$$\int_{\Omega} 1_A [X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] P^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; d\omega)$$

prenne la forme particulière

$$= Q^k (x_k, u_{k+1} ; A)$$

Mais dans certains cas il est possible d'affirmer que le processus $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est markovien sans pour autant connaître une suite régulière de probabilités conditionnelles (voir exemple de l'alinéa suivant).

VI,2. Exemple : processus markovien à commande défini par une équation d'évolution à bruit sans mémoire (ou « blanc »)

THEOREME VI.2

Soit $(V_0, V_1, \dots, V_k, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, appelées bruit, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Etant donné deux espaces mesurables $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, soient f_0 une application mesurable de $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ une suite d'applications mesurables :

$$f_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{V}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

Alors le processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k \dots)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(U, \mathcal{U})$, obtenu en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0(\omega) = f_0 [V_0(\omega)] \\ X_1(\omega, u_1) = f_1 [X_0(\omega), u_1, V_1(\omega)] \\ \dots\dots\dots \\ X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) = f_k [X_{k-1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, V_k(\omega)] \end{array} \right.$$

pour tous $\omega \in \Omega$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in U$ est un processus markovien à commande: à chaque instant k , X_{k+1} admet pour probabilité conditionnelle universelle relativement à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ la probabilité de transition :

$$Q^k : (X, \mathcal{X}) \times (U, \mathcal{U}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$$

définie, pour $x_k \in X$, $u_{k+1} \in U$ et $A \in \mathcal{X}$, par :

$$\begin{aligned} & Q^k(x_k, u_{k+1}; A) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [f_{k+1}(x_k, u_{k+1}, V_{k+1}(\omega))] P(d\omega) \\ &= \int_{\mathcal{V}} 1_A [f_{k+1}(x_k, u_{k+1}, v_{k+1})] P V_{k+1}^{-1}(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION

La probabilité $P V_{k+1}^{-1}$, image de la probabilité P par l'application mesurable V_{k+1} , constitue, à chaque instant $k=0, 1, 2, \dots$, une probabilité conditionnelle universelle pour la variable aléatoire ordinaire V_{k+1} , considérée comme une variable aléatoire à $k+1$ commandes particulière, relativement au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k)$

En effet, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ un bouclage défini sur $(X, \mathcal{X})$ et à valeurs dans $(U, \mathcal{U})$. Soit $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$ le processus à commande bouclée associé à $(X_0, X_1, \dots, X_k \dots)$. Il est clair que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0 = f_0 (V_0) \\ \bar{X}_1 = f_1 [\bar{X}_0, \alpha_1(\bar{X}_0), V_1] \\ \dots\dots\dots \\ \bar{X}_k = f_k [\bar{X}_{k-1}, \alpha_k(\bar{X}_{k-1}), V_k] \end{array} \right.$$

Comme on peut le montrer immédiatement par récurrence, il existe donc, à tout instant $k=0, 1, 2, \dots$, une application mesurable $\bar{\rho}_k$ de $(\mathcal{V}, \mathcal{V})^{k+1}$ dans $(X, \mathcal{X})$ telle que :

$$\bar{X}_k = \bar{\rho}_k (V_0, V_1, \dots, V_k)$$

Par suite, quel que soit $k=0,1,\dots$, V_{k+1} est une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$, et on a, pour tout $C \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} E \{ 1_C (V_{k+1}) / \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \} \\ \stackrel{\text{r.s.}}{=} E \{ 1_C (V_{k+1}) \} = P V_{k+1}^{-1} (C) \end{aligned}$$

(cf. Meyer [21], théorème 51, p. 52 et remarque 50 a)).

D'après la deuxième partie du théorème V.3.2, Q^k , considérée comme une probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ particulière, est bien une probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} relativement à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$.

C.Q.F.D.

VI.3. Bouclage markovien

Considérons un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k \dots)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$. Etant donné un bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ désignons par $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \dots)$ le processus à commande bouclée obtenu en posant pour tout $j = 0, 1, \dots, k, \dots$:

$$\bar{X}_j(\omega) = X_j [\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \dots, \alpha_j(\bar{X}_0(\omega), \bar{X}_1(\omega), \dots, \bar{X}_{j-1}(\omega))]$$

Supposons que $(X_0, X_1, \dots, X_k \dots)$ est un processus markovien à commande : à chaque instant k , X_{k+1} admet pour probabilité conditionnelle universelle par rapport à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ une probabilité de transition Q^k de la forme :

$$Q^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

D'après la première partie du théorème V.3.2, pour toute fonction réelle positive mesurable φ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, la variable aléatoire :

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi(x) Q^k [\bar{X}_k, \alpha_{k+1}(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k) ; dx]$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle

$$E \{ \varphi(\bar{X}_{k+1}) / \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \}$$

En général cette variable aléatoire n'est pas $\bar{X}_k^{-1}(\mathcal{X})$ -mesurable, et par suite le processus à commande bouclée $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \dots)$ n'est pas un processus aléatoire markovien ordinaire.

On peut malgré tout justifier l'appellation « markovien » pour le processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k \dots)$ de la façon suivante.

On dira que le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \dots)$ est markovien si les applications mesurables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \dots$ sont choisies de la forme particulière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(x_0) = \beta_1(x_0) \\ \alpha_2(x_0, x_1) = \beta_2(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}) = \beta_k(x_{k-1}) \end{array} \right.$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots$ sont des applications mesurables de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Construire un processus aléatoire à commande bouclée au moyen d'un bouclage markovien revient donc à

n'utiliser, pour le choix de la commande à l'instant k , que la valeur prise par le processus à l'instant immédiatement antérieur $k-1$ (et non plus toutes les valeurs prises aux instants $0, 1, 2, \dots, k-2, k-1$).

THÉORÈME VI.3.

Si $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est un processus aléatoire à commande markovien, alors, pour tout bouclage markovien $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$, le processus à commande bouclée $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots)$ obtenu en posant pour $j=0, 1, 2, \dots, k, \dots$ et $\omega \in \Omega$:

$$\bar{X}_j(\omega) = X_j [\omega, \beta_1(\bar{X}_0(\omega)), \beta_2(\bar{X}_1(\omega)), \dots, \beta_j(\bar{X}_{j-1}(\omega))]$$

est un processus markovien ordinaire.

DÉMONSTRATION :

Si Q^k est la probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} relativement à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$, alors pour toute fonction réelle positive mesurable φ sur $(X, \mathcal{X})$, la variable aléatoire :

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi(x) Q^k [\bar{X}_k, \beta_{k+1}(\bar{X}_k) ; dx]$$

est, d'après le théorème V.3.2, un représentant de :

$$E \left\{ \varphi(\bar{X}_{k+1}) / \bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \right\}$$

Comme par ailleurs cette variable aléatoire est cette fois visiblement $\bar{X}_k^{-1}(\mathcal{X})$ - mesurable on en déduit que le processus $\{\bar{X}_k\}$ est bien markovien.

C.Q.F.D.



VII - AUTRE MODÈLE MATHÉMATIQUE POUR L'ÉTUDE DES SYSTÈMES STOCHASTIQUES A COMMANDE

Les probabilités conditionnelles universelles jouent un rôle fondamental dans de nombreux problèmes se posant à propos des processus aléatoires à commande, et notamment, comme on le verra au chapitre 5, en théorie de la commande optimale stochastique.

C'est pourquoi, à défaut des théorèmes d'existence des paragraphes III et IV, certains auteurs ont choisi, pour l'étude des « systèmes stochastiques à commande », un modèle mathématique différent de celui que nous avons adopté. C'est ce que font par exemple **Pallu de la Barrière** [24] dans le cas markovien discret, **Blackwell** [5] et **Strauch** [25] dans le cas markovien non discret et **Hinderer** [15], dans le cas général, discret et non discret.

Il y a là matière à une intéressante comparaison, que nous ferons après avoir décrit brièvement ce nouveau modèle.

Etant donné deux espaces mesurables $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (espace d'état) et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ (espace de commande), un *système stochastique à commande* est par définition une suite $P_0, Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ constituée d'une probabilité P_0 sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et de probabilités de transition $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$:

$$Q^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1} \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

Le système est dit *markovien* si pour tout $k=0, 1, 2, \dots$, $Q^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}; \cdot)$ ne dépend que de x_k et u_{k+1} .

Le *bouclage* est toujours défini comme une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ d'applications mesurables :

$$\alpha_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^k \rightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

Il est dit *markovien* si $\alpha_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})$ ne dépend que de x_{k-1} .

En fait **Hinderer** [15] utilise aussi des politiques c'est-à-dire des suites $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots)$ d'application mesurables :

$$\gamma_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k-1} \rightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

Mais, comme on le verra en détail au chapitre 5, il est facile d'associer, par des compositions successives, un bouclage à une politique donnée.

Un certain bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ étant choisi, on construit les probabilités de transition $\bar{Q}^0, \bar{Q}^1, \dots, \bar{Q}^k$:

$$\bar{Q}^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

en posant :

$$\begin{aligned} & \bar{Q}^k(x_0, x_1, \dots, x_k; A) \\ &= Q^k[x_0, x_1, \dots, x_k, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0, x_1), \dots, \alpha_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k); A] \end{aligned}$$

pour tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$ et $A \in \mathcal{X}$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ l'espace mesurable produit : $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathcal{X}, \mathcal{X})^N$ où $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ et X_k l'application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ qui à $\omega \in \Omega$ fait correspondre sa $(k+1)$ ème coordonnée :

$$X_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots) = x_k$$

D'après le théorème de Ionescu-Tulcea (cf. Neveu [23], proposition V.1.1 et corollaire 2, p. 145 à 148) il existe sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une probabilité unique $\bar{P}$ telle que, quels que soient k entier positif, φ_k fonction réelle positive mesurable sur $(X, \mathcal{X})^{k+1}$, on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi_k [X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)] \bar{P}(d\omega) \\ &= \int_X P_0(dx_0) \int_X \bar{Q}^0(x_0; dx_1) \int_X \bar{Q}^1(x_0, x_1; dx_2) \dots \\ & \dots \int_X \varphi_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \bar{Q}^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}; dx_k) \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que pour tout $k \geq 1$ et tous $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, A_k \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_{A_0}[X_0(\omega)] 1_{A_1}[X_1(\omega)] \dots 1_{A_{k-1}}[X_{k-1}(\omega)] 1_{A_k}[X_k(\omega)] \bar{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_{A_0}[X_0(\omega)] 1_{A_1}[X_1(\omega)] \dots 1_{A_{k-1}}[X_{k-1}(\omega)] \\ & \quad \bar{Q}^{k-1}[X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_{k-1}(\omega); A_k] \bar{P}(d\omega) \end{aligned}$$

et par suite que :

$$\bar{Q}^{k-1}[X_0, X_1, \dots, X_{k-1}; A_k] \in \mathop{\mathbb{E}}_{\bar{P}} \left\{ 1_{A_k}[X_k] / X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \right\}$$

le symbole $\mathop{\mathbb{E}}_{\bar{P}}$ indiquant que $(\Omega, \mathcal{F})$ est muni de la probabilité $\bar{P}$ qui dépend du bouclage choisi.

Autrement dit, $\bar{Q}^{k-1}$ est une probabilité conditionnelle (régulière) pour X_k par rapport à $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$ ($(\Omega, \mathcal{F})$ étant muni de $\bar{P}$).

On voit donc que les probabilités de transition Q^k et $\bar{Q}^k$ jouent un rôle tout à fait semblable respectivement à celui des probabilités conditionnelles universelles Q^k et à celui des probabilités conditionnelles régulières $\bar{Q}^k$ considérées à l'alinéa V.1. En particulier le caractère markovien se définit de la même façon qu'au paragraphe VI.

La principale différence entre les deux modèles réside dans la manière dont on associe, à un bouclage donné, un processus aléatoire :

- 1 - dans le modèle adopté ici (et décrit aux paragraphes I et II), on définit sur un espace de probabilité global, un « processus aléatoire à commande » ; le processus aléatoire ordinaire s'en déduit par composition avec le bouclage.
- 2 - dans le modèle de type Hinderer (décrit ci-dessus) on se donne des probabilités de transition, qu'on utilise après les avoir composées avec le bouclage, pour construire un espace de probabilité ; le processus aléatoire ordinaire est le processus canonique de cet espace de probabilité (qui est différent pour chaque bouclage).

Le principal avantage du modèle de type Hinderer est d'inclure dans les hypothèses l'existence d'une sorte de probabilité conditionnelle universelle, dont les propriétés sont, comme nous l'avons souligné en début de paragraphe, bien commodes pour les développements mathématiques ultérieurs.

Sur le plan théorique, cet avantage voit sa portée sensiblement réduite par les théorèmes d'existence des paragraphes III et IV.

Sur le plan pratique, il n'est vraiment intéressant que si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1 - les probabilités de transition $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ sont données, ou alors très faciles à construire,

Or, d'une part, il ne nous semble pas que les problèmes pratiques se posent souvent à l'aide de probabilités de transition, sauf dans le cas fini (chaînes de Markov à commande discrètes).

D'autre part, dans le cas de systèmes décrits par une équation d'évolution (voir al. I, 2) ces probabilités de transition ne seront obtenues rapidement que si le « bruit » est sans mémoire, en utilisant la formule du théorème VI.2 du paragraphe VI. Dans un cas plus général, on devra effectuer tout un calcul préliminaire, utilisant vraisemblablement des méthodes analogues à celles développées dans le chapitre 4, et qui reviendra à calculer, sans le dire, une suite régulière de probabilités conditionnelles.

2 - les probabilités de transition $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ sont bien celles dont nous avons besoin.

Cela ne nous paraît pas être le cas si le processus $\{X_k\}$ n'est que *partiellement observé*. Supposons en effet que $(X, X) = (X_1 \times X_2, X_1 \otimes X_2)$ et que $X_k = (X_k^1, X_k^2)$, X_k^1 constituant la partie non-observée, à valeurs dans (X_1, X_1) (« processus d'état ») et X_k^2 la partie observée, à valeurs dans (X_2, X_2) (« processus d'observation »).

La construction de type Hinderer utilisera des probabilités de transition :

$$Q^k : (X_1 \times X_2, X_1 \otimes X_2)^{k+1} \times (U, U)^{k+1} \longrightarrow (X_1 \times X_2, X_1 \otimes X_2)$$

Par contre il est clair que les probabilités de transition « intéressantes » seront de la forme :

$$^1 Q^k : (X_2, X_2)^{k+1} \times (U, U)^{k+1} \longrightarrow (X_1, X_1)$$

ou :

$$^2 Q^k : (X_2, X_2)^{k+1} \times (U, U)^{k+1} \longrightarrow (X_2, X_2)$$

et devront nous permettre de calculer des probabilités conditionnelles pour l'état X_{k+1}^1 ou l'observation X_{k+1}^2 par rapport aux observations passées $X_0^2, X_1^2, \dots, X_k^2$.

(voir chapitre 5 par exemple, pour l'utilisation de ces probabilités conditionnelles).



Pour être définitivement assuré que le modèle que nous utilisons ici est préférable à celui du type Hinderer, il faudrait résoudre ce qu'on pourrait appeler le problème des processus aléatoires à commande canoniques, c'est-à-dire montrer que toute suite $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ de probabilités de transition de la forme :

$$Q^k : (X, X)^{k+1} \times (U, U)^{k+1} \longrightarrow (X, X)$$

peut s'interpréter, moyennant des hypothèses pas trop restrictives, comme une suite de probabilités conditionnelles universelles pour un certain processus aléatoire à commande.

L'étude de ce problème fait l'objet du chapitre 3 et nous verrons que nous n'avons su lui apporter qu'une solution partielle.



Chapitre 3

RECHERCHE D'UN ESPACE DE PROBABILITÉ CANONIQUE

I - POSITION DU PROBLÈME

Considérons un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{X}, P_0)$, appelé espace d'état, et un espace mesurable $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ appelé espace de commande.

Supposons qu'on s'est donné une suite finie ou infinie dénombrable $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ de probabilités de transition :

$$Q^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

On se propose de trouver un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on puisse définir un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

- 1 - la probabilité induite sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ par la variable aléatoire X_0 à partir de la probabilité P est la probabilité P_0 , c'est-à-dire pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$\int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] P(d\omega) = P_0(A)$$

- 2 - pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$, la probabilité de transition Q^k constitue pour la variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} une probabilité conditionnelle universelle relativement au processus aléatoire à commande $(X_0, \dots, X_k)$. (voir définition du chapitre 2, paragraphe V).

D'après le théorème IV.1 et l'alinéa V.2.3 du chapitre 2, pour que cette deuxième condition soit satisfaite il suffit qu'on sache construire une suite $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ de probabilités de transition :

$$P^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

- 3 - pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ la probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1}$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ induite par X_{k+1} à partir de P^k est la probabilité de transition Q^k c'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{X}$, tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] P^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \\ &= Q^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}; A) \end{aligned}$$

- 4 - $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ constitue une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ (voir définition du chapitre 2, paragraphe III).

Le problème précédent peut être considéré comme une sorte de réciproque du problème étudié au chapitre 2; où l'on supposait connus l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et le processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ et on cherchait à montrer l'existence de probabilités de transition $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ ayant des propriétés convenables, de sorte qu'en particulier leurs images $Q^0, Q^1, \dots, Q^k, \dots$ par les applications $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}, \dots$ soient des probabilités conditionnelles universelles.

Nous n'avons pu résoudre ce problème que dans un cas particulier : *dans toute la suite du chapitre nous supposerons que l'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ est un ensemble $\mathcal{U}$ fini ou dénombrable, muni de la σ algèbre $\mathcal{U}$ de toutes ses parties (engendrée ici par les sous-ensembles de $\mathcal{U}$ réduits à un seul point).*

Cette hypothèse est évidemment très restrictive. Dans la construction que nous utilisons, il semble qu'elle intervienne essentiellement pour assurer la *mesurabilité* de l'application X_k sur l'espace produit $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ (cf. alinéa II,3).

Les résultats obtenus, qui ne nécessitent d'ailleurs aucune hypothèse de nature topologique sur l'espace d'état $(X, \mathcal{X})$, nous permettent quand même de traiter l'exemple important des chaînes de Markov à commande discrètes (cf. chapitre 6, paragraphe IV).



II - CONSTRUCTION DES ESPACES MESURABLES, APPLICATIONS MESURABLES, ET PROBABILITÉS DE TRANSITION DE BASE

II.1. Espaces $(\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j)$ et $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$

On pose, pour $j = 0, 1, 2, \dots$:

$$(\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j) = (\mathbb{X}, \mathcal{X})^{(\mathbb{L})^j}$$

Un élément v_j de $\mathbb{V}_j$ est donc une suite finie ou dénombrable (selon que $\mathbb{L}$ est fini ou dénombrable) d'éléments de $\mathbb{X}$ indicés par j indices $u_1, u_2, \dots, u_j$ variant chacun dans $\mathbb{L}$:

$$v_j = \{ x_{u_1, u_2, \dots, u_j} ; (u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{L}^j \}$$

Un pavé mesurable B_j de $\mathcal{V}_j$ est un produit cartésien d'éléments de la σ -algèbre $\mathcal{X}$ indicés par j indices variant dans $\mathbb{L}$, et dont seulement un nombre fini sont différents de $\mathbb{X}$:

$$B_j = \prod_{(u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{L}^j} A_{u_1, u_2, \dots, u_j}$$

(avec $A_{u_1, u_2, \dots, u_j} \in \mathcal{X}$ et $= \mathbb{X}$ sauf pour un nombre fini d'indices).

On désignera par $\mathcal{V}_j^0$ la semi algèbre des pavés mesurables de $\mathcal{V}_j$. Par définition $\mathcal{V}_j$ est la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{V}_j^0$.

On pose ensuite pour $j = 0, 1, 2, \dots$:

$$(\Omega_j, \mathcal{F}_j) = (\mathbb{V}_0, \mathcal{V}_0) \times (\mathbb{V}_1, \mathcal{V}_1) \times \dots \times (\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j)$$

On a donc, pour $j = 0$:

$$(\Omega_0, \mathcal{F}_0) = (\mathbb{V}_0, \mathcal{V}_0) = (\mathbb{X}, \mathcal{X})$$

et pour $j \geq 1$:

$$(\Omega_j, \mathcal{F}_j) = (\Omega_{j-1}, \mathcal{F}_{j-1}) \times (\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j)$$

II.2. Applications de « substitution » et « d'élimination »

Soient $\{ A_{u_1, u_2, \dots, u_j} ; (u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{L}^j \}$ une suite à j indices dans $\mathbb{L}$ de sous ensembles (mesurables ou non) de $\mathbb{X}$ et B_j leur produit cartésien :

$$B_j = \prod_{(u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{L}^j} A_{u_1, u_2, \dots, u_j}$$

B_j est un sous-ensemble de $\mathbb{V}_j$.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{X}$.

Etant donné j éléments $u_1, u_2, \dots, u_j$ de $\mathbb{L}$ on note $\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}$ l'application dite de *substitution* qui, au couple (B_j, A) , fait correspondre le sous-ensemble de $\mathbb{V}_j$:

$$\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j, A) = \prod_{(u'_1, u'_2, \dots, u'_j) \in \mathbb{L}^j} \tilde{A}_{u'_1, u'_2, \dots, u'_j}$$

où

$$\tilde{A}_{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} = \begin{cases} A_{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} & \text{si } (u'_1, u'_2, \dots, u'_j) \neq (u_1, u_2, \dots, u_j) \\ A & \text{si } (u'_1, u'_2, \dots, u'_j) = (u_1, u_2, \dots, u_j) \end{cases}$$

Cette opération consiste donc à remplacer par A l'élément d'indice $(u_1, u_2, \dots, u_j)$ dans le produit B_j .

De même on note $\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}$ l'application dite d'*élimination* qui, au produit B_j , fait correspondre le sous-ensemble de $\mathbb{X}$:

$$\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j) = A_{u_1, u_2, \dots, u_j}$$

Cette opération consiste donc à éliminer dans le produit B_j tous les termes d'indice différent de $(u_1, u_2, \dots, u_j)$.

Il est clair que si $B_j \in \mathcal{V}_j^0$ (semi algèbre des pavés mesurables) et si $A \in \mathcal{X}$ alors :

$$\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j, A) \in \mathcal{V}_j^0 \text{ et :}$$

$$\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j) \in \mathcal{X}$$

D'autre part, en se restreignant aux ensembles B_j et A de la forme :

$$B_j = \prod_{(u_1, u_2, \dots, u_j) \in L_j} \{ x_{u_1, u_2, \dots, u_j} \}$$

$$A = \{ x \}$$

où $x_{u_1, u_2, \dots, u_j} \in \mathcal{X}$ pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_j) \in L_j$ et $x \in \mathcal{X}$ on définit une application :

$$\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} : (\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow (\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j)$$

et une application :

$$\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} : (\mathbb{V}_j, \mathcal{V}_j) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

dont il est facile de vérifier qu'elles sont mesurables. En effet, soit $B_j \in \mathcal{V}_j^0$; on a :

$$\{ (v_j, x) \in \mathbb{V}_j \times \mathcal{X} : \sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (v_j, x) \in B_j \}$$

$$= \sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j, \mathcal{X}) \times \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j)$$

qui appartient visiblement à $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{X}$; comme $\mathcal{V}_j^0$ engendre $\mathcal{V}_j$, la mesurabilité de $\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}$ est bien prouvée. De même, soit $A \in \mathcal{X}$; on a :

$$\{ v_j \in \mathbb{V}_j : \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (v_j) \in A \}$$

$$= \sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (\mathbb{V}_j, A)$$

qui appartient à $\mathcal{V}_j^0 \subset \mathcal{V}_j$.

Enfin il sera commode de désigner par $\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}$ l'application mesurable :

$$\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} : (\Omega_j, \mathcal{F}_j) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{j+1} \longrightarrow (\Omega_j, \mathcal{F}_j)$$

définie en posant, pour tout $\omega_j = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_j)$ (où $v_i \in \mathbb{V}_i$) et tous $x_0, x_1, \dots, x_j \in \mathcal{X}$:

$$\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (\omega_j ; x_0, x_1, x_2, \dots, x_j)$$

$$= [x_0, \sigma_1^{u_1} (v_1, x_1), \sigma_2^{u_1, u_2} (v_2, x_2), \dots, \sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (v_j, x_j)]$$

REMARQUE II.2

Par définition, pour tout $B_j \in \mathcal{V}_j^0$ et tout $A \in \mathcal{X}$:

$$\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} [\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j, A)] = A$$

et pour $(u'_1, u'_2, \dots, u'_j) \neq (u_1, u_2, \dots, u_j)$

$$\varepsilon_j^{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} [\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (B_j, A)]$$

$$= \varepsilon_j^{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} (B_j)$$

De même pour tout $v_j \in \mathbb{V}_j$ et tout $x \in \mathbb{X}$:

$$\varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} [\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (v_j, x)] = x$$

et si $(u'_1, u'_2, \dots, u'_j) \neq (u_1, u_2, \dots, u_j)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} [\sigma_j^{u_1, u_2, \dots, u_j} (v_j, x)] \\ = \varepsilon_j^{u'_1, u'_2, \dots, u'_j} (v_j) \end{aligned}$$

II,3. Processus aléatoire à commande $\{ X_i^j ; i = 0, 1, \dots, j \}$

Pour tout $j = 0, 1, 2, \dots$ on définit sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ un processus aléatoire à commande d'horizon j : $X_0^j, X_1^j, \dots, X_i^j, \dots, X_j^j$ à valeurs dans $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(\mathbb{U}, \mathcal{U})$, en posant pour tout $\omega_j = (v_0, v_1, \dots, v_i, \dots, v_j) \in \Omega_j$, l'élément v_i étant de la forme :

$$v_i = \left\{ x_{u'_1, u'_2, \dots, u'_i} ; (u'_1, u'_2, \dots, u'_i) \in \mathbb{U}^i \right\}$$

avec $x_{u'_1, u'_2, \dots, u'_i} \in \mathbb{X}$, et pour tous $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{U}$:

$$X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) = x_{u_1, u_2, \dots, u_i}$$

On peut vérifier que X_i^j est bien une variable aléatoire à i commandes, c'est à dire une application mesurable :

$$X_i^j : (\Omega_j, \mathcal{F}_j) \times (\mathbb{U}, \mathcal{U})^i \longrightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{X})$$

En effet, soit $A \in \mathcal{X}$. Considérons l'ensemble :

$$\begin{aligned} (X_i^j)^{-1}(A) \\ = \left\{ (\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) \in \Omega_j \times \mathbb{U}^i : X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) \in A \right\} \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned} (X_i^j)^{-1}(A) \\ = \bigcup_{(u_1, u_2, \dots, u_i) \in \mathbb{U}^i} \left\{ \omega_j \in \Omega_j : X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) \in A \right\} \times \{u_1\} \times \{u_2\} \times \dots \times \{u_i\} \end{aligned}$$

$\mathbb{U}$ étant supposé fini ou dénombrable, $\mathbb{U}^i$ est fini ou dénombrable. $\mathcal{U}$ étant la σ -algèbre des parties de $\mathbb{U}$, l'ensemble produit $\{u_1\} \times \{u_2\} \times \dots \times \{u_i\}$ appartient à $\mathcal{U}^i$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_j \in \Omega_j : X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) \in A \right\} \\ = \mathbb{V}_0 \times \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_{i-1} \times \sigma_i^{u_1, u_2, \dots, u_i}(\mathbb{V}_i, A) \times \mathbb{V}_{i+1} \times \dots \times \mathbb{V}_j \end{aligned}$$

qui visiblement appartient à $\mathcal{F}_j$.

$(X_i^j)^{-1}(A)$ apparaît donc comme une réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}_j \otimes \mathcal{U}^i$ et par suite appartient aussi à $\mathcal{F}_j \otimes \mathcal{U}^i$.

REMARQUE II,3

Par définition même, si $\omega_j \in \Omega_j$ et $v_{j+1} \in \mathbb{V}_{j+1}$, $v_{j+2} \in \mathbb{V}_{j+2}$, ..., $v_k \in \mathbb{V}_k$ et si on pose :

$$\omega_k = (\omega_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_k)$$

alors, pour tout $i \leq j \leq k$:

$$X_i^k(\omega_k, u_1, u_2, \dots, u_i) = X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)$$

quels que soient $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{U}$.

II.4. Probabilités de transition S^j et T_j^i

Les probabilités de transition $S^0, S^1, \dots, S^j, \dots$:

$$S^j : (\Omega_j, \mathcal{F}_j) \longrightarrow (\mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1})$$

sont définies à partir des probabilités de transition $Q^0, Q^1, \dots, Q^j, \dots$ en posant, pour tout pavé mesurable $B_{j+1} \in \mathcal{V}_{j+1}^0$ et tout point $\omega_j = (v_0, v_1, \dots, v_j) \in \Omega_j$:

$$(II.1) \quad \begin{aligned} S^j (v_0, v_1, \dots, v_j ; B_{j+1}) \\ = \prod_{(u_1, u_2, \dots, u_{j+1}) \in \mathcal{U}^{j+1}} Q^j [v_0, \varepsilon_1^{u_1}(v_1), \varepsilon_2^{u_1, u_2}(v_2), \dots, \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(v_j), \\ u_1, u_2, \dots, u_{j+1} ; \varepsilon_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}}(B_{j+1})] \end{aligned}$$

La formule (II.1) définit bien de façon unique une probabilité de transition de $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ dans $(\mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1})$. En effet, pour $\omega_j = (v_0, v_1, \dots, v_j) \in \Omega_j$ fixé, il existe une probabilité et une seule $S^j(v_0, v_1, \dots, v_j ; \cdot)$ sur $(\mathcal{V}_{j+1}, \mathcal{V}_{j+1})$ vérifiant (II.1) pour tout élément B_{j+1} de la semi-algèbre $\mathcal{V}_{j+1}^0$ des pavés mesurables (théorème des probabilités produits, cf. par exemple **Neveu** [23], propos. IV.1.2, p. 149). D'autre part, pour $B_{j+1} \in \mathcal{V}_{j+1}^0$ fixé, $S^j(\cdot ; B_{j+1})$ est une fonction réelle positive mesurable sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, d'après la mesurabilité des $\varepsilon_i^{u_1, u_2, \dots, u_i}$. Comme $\mathcal{V}_{j+1}^0$ est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{V}_{j+1}$, S^j est bien une probabilité de transition (Annexe, lemme III.1).

On définit maintenant les probabilités de transition T_j^i de $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ dans $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ par récurrence, en posant pour tout $F_j \in \mathcal{F}_j$:

$$1 - \text{pour } j \geq 0 \text{ et } \omega_j \in \Omega_j : \\ T_j^j(\omega_j ; F_j) = 1_{F_j}(\omega_j) \\ (\text{probabilité de transition de Dirac}).$$

2.- pour $j \geq i+1 \geq 1$ et $\omega_i \in \Omega_i$:

$$(II.2) \quad T_j^i(\omega_i ; F_j) = \int_{\mathcal{V}_{j+1}} T_j^{i+1}(\omega_i, v_{i+1} ; F_j) S^i(\omega_i ; dv_{i+1})$$

Si T_j^{i+1} est une probabilité de transition de $(\Omega_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1})$ dans $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ la formule (II.2) définit bien une probabilité de transition de $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ dans $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ (composition des probabilités de transition, annexe, lemme III.4). Or c'est le cas pour $i = j-1$ donc pour $i \leq j-1$ quelconque.

REMARQUE II.4.1

Pour tous $j \geq 0$, $\omega_j \in \Omega_j$ quelle que soit φ_j réelle positive mesurable sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, on a :

$$\int_{\Omega_j} \varphi_j(\omega_j') T_j^j(\omega_j ; d\omega_j') = \varphi_j(\omega_j)$$

En effet, d'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, il suffit que ce soit vrai pour $\varphi_j = 1_{F_j}$ où $F_j \in \mathcal{F}_j$; or dans ce cas c'est la définition même de T_j^j .

REMARQUE II.4.2.

Pour tous $j \geq i+1 \geq 1$, $\omega_i \in \Omega_i$, quelle que soit φ_j réelle positive mesurable sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, on a :

$$\int_{\Omega_j} \varphi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i ; d\omega_j)$$

$$= \int_{V_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{V_{i+2}} S^{i+1}(\omega_i, v_{i+1}; dv_{i+2}) \int_{V_{i+3}} \dots \\ \dots \int_{V_j} S^{j-1}(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \varphi_j(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, v_j)$$

C'est en effet vrai par définition pour $\varphi_j = 1_{F_j}$ où $F_j \in \mathcal{F}_j$ et par suite pour toute φ_j positive $\mathcal{F}_j$ -mesurable.

REMARQUE II,4.3

Pour tous $k \geq j \geq i \geq 0$, $\omega_i \in \Omega_i$, quelle que soit φ_k réelle positive mesurable sur $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ on a :

$$\int_{\Omega_k} \varphi_k(\omega_k) T_k^i(\omega_i; d\omega_k) \\ = \int_{\Omega_j} T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \int_{\Omega_k} T_k^j(\omega_j; d\omega_k) \varphi_k(\omega_k)$$

En effet, si $i=j$ ou (et) $j=k$, c'est trivial d'après la remarque II,4.1. Si $k \geq j+1 \geq i+2$, on a, d'après la remarque II,4.2 :

$$\int_{\Omega_j} T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \int_{\Omega_k} T_k^j(\omega_j; d\omega_k) \varphi_k(\omega_k) \\ = \int_{V_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{V_{i+2}} S^{i+1}(\omega_i, v_{i+1}; dv_{i+2}) \int_{V_{i+3}} \dots \\ \dots \int_{V_j} S^{j-1}(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \int_{\Omega_k} T_k^j(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j; d\omega_k) \varphi_k(\omega_k) \\ = \int_{V_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{V_{i+2}} S^{i+1}(\omega_i, v_{i+1}; dv_{i+2}) \int_{V_{i+3}} \dots \\ \int_{V_j} S^{j-1}(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \int_{V_{j+1}} S^j(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j; dv_{j+1}) \int_{V_{j+2}} \dots \\ \int_{V_k} S^{k-1}(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}; dv_k) \varphi_k(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k) \\ = \int_{\Omega_k} \varphi_k(\omega_k) T_k^i(\omega_i; d\omega_k)$$

II,5. Probabilités P_j et probabilités de transition P_j^i

On munit les espaces mesurables $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ d'une probabilité P_j ainsi construite :

- pour $j=0$, $(\Omega_0, \mathcal{F}_0) = (\mathcal{X}, \mathcal{X})$; on y prend donc la probabilité P_0 (donnée par hypothèse)

- pour $j \geq 1$ on définit P_j en posant pour tout $F_j \in \mathcal{F}_j$:

$$P_j (F_j) = \int_{\Omega_0} T_j^0 (\omega_0 ; F_j) P_0 (d\omega_0)$$

Le corollaire III.3 de l'annexe assure qu'il s'agit bien d'une probabilité.

On remarquera que la formule précédente est encore vraie pour $j = 0$.

Pour $j \geq i \geq 0$ on définit enfin les probabilités de transitions :

$$P_j^i : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{i+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^i \longrightarrow (\Omega_j, \mathcal{F}_j)$$

de la façon suivante :

1 - si $j = i = 0$ on pose, pour tous $x_0 \in \mathcal{X}$ et $F_0 \in \mathcal{F}_0 (= \mathcal{X})$:

$$P_0^0 (x_0 ; F_0) = 1_{F_0} (x_0)$$

(probabilité de transition de Dirac).

2 - soit $i \geq 0$; supposons qu'on a déjà construit une probabilité de transition P_i^i de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{i+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^i$ dans $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$.

- si $j \geq i+1$ on pose d'abord, pour tous $F_j \in \mathcal{F}_j$, $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathcal{U}$:

$$P_j^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; F_j)$$

(II.3)

$$= \int_{\Omega_i} T_j^i (\omega_i ; F_j) P_i^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i)$$

D'après le lemme III.4 de l'annexe, la formule précédente définit bien une probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{i+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^i$ dans $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$. On remarquera que (II.3) est triviale pour $j = i$.

- on pose ensuite, pour tous $F_{i+1} \in \mathcal{F}_{i+1}$, $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1} \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathcal{U}$:

$$P_{i+1}^{i+1} (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} ; F_{i+1})$$

(II.4)

$$= \int_{\Omega_{i+1}} 1_{F_{i+1}} [\omega_{i+1}, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}} (v_{i+1}, x_{i+1})] P_i^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i \times dv_{i+1})$$

D'après le corollaire III.5 de l'annexe, la formule (II.4) définit bien une probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})^{i+2} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{i+1}$ dans $(\Omega_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1})$, pourvu que $\sigma_{i+1}^{(\cdot)}(\cdot)$ soit une application mesurable de $(\mathcal{V}_{i+1}, \mathcal{U}_{i+1}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{i+1}$ dans $(\mathcal{V}_{i+1}, \mathcal{U}_{i+1})$. Or cela est facile à montrer. Soit en effet B_{i+1} un élément de $\mathcal{U}_{i+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} & [\sigma_{i+1}^{(\cdot)}(\cdot)]^{-1} (B_{i+1}) \\ &= \bigcup_{(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}) \in \mathcal{U}^{i+1}} \left\{ [\sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(\cdot)]^{-1} (B_{i+1}) \right\} \times \{u_1\} \times \{u_2\} \times \dots \times \{u_{i+1}\} \end{aligned}$$

$\sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}$ étant une application mesurable de $(\mathcal{V}_{i+1}, \mathcal{U}_{i+1}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathcal{V}_{i+1}, \mathcal{U}_{i+1})$, l'ensemble $[\sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(\cdot)]^{-1} (B_{i+1})$ appartient à $\mathcal{V}_{i+1} \otimes \mathcal{X}$. D'autre part, $\mathcal{U}$ étant la σ algèbre des parties de $\mathcal{U}$, $\{u_1\} \times \{u_2\} \times \dots \times \{u_{i+1}\}$ appartient à $\mathcal{U}^{i+1}$. L'ensemble

$[\sigma_{i+1}^{(\cdot)}(\cdot)]^{-1} (B_{i+1})$ apparaît donc comme une réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{V}_{i+1} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U}^{i+1}$ et par suite appartient lui-même à $\mathcal{V}_{i+1} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U}^{i+1}$.

REMARQUE II,5.1

Quel que soit $x_0 \in X$, la relation :

$$\int_{\Omega_0} \varphi_0(\omega_0) P_0^\circ(x_0; d\omega_0) = \varphi_0(x_0)$$

est vraie, par définition, lorsque $\varphi_0 = 1_{F_0}$ où $F_0 \in \mathcal{F}_0$ et par suite, d'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, lorsque φ_0 est une fonction réelle positive mesurable sur $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$.

REMARQUE II,5.2

Quels que soient les entiers $i \geq 0$ et $j \geq i$ et quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_i \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in L^1$, la relation :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_j} \varphi_j(\omega_j) P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ &= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad \int_{\Omega_j} T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \varphi_j(\omega_j) \end{aligned}$$

est vraie par définition lorsque $\varphi_j = 1_{F_j}$ où $F_j \in \mathcal{F}_j$ et par suite lorsque φ_j est une fonction positive mesurable sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$.

REMARQUE II,5.3

Quels que soient $i \geq 0$, $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1} \in X$ et $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in L^1$ la relation :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+1}} \varphi_{i+1}(\omega_{i+1}) P_{i+1}^{i+1}(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; d\omega_{i+1}) \\ &= \int_{\Omega_{i+1}} \varphi_{i+1}[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1})] \\ & \quad P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i \times dv_{i+1}) \end{aligned}$$

est vraie par définition lorsque $\varphi_{i+1} = 1_{F_{i+1}}$ où $F_{i+1} \in \mathcal{F}_{i+1}$ et par suite lorsque φ_{i+1} est une fonction positive mesurable sur $(\Omega_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1})$.



III - PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS DE TRANSITION DE BASE

III.1. Propriétés de T_j^i

LEMME III.1

Soit φ_{j+1} une fonction réelle positive mesurable définie sur $(\Omega_{j+1}, \mathcal{F}_{j+1})$. Quels que soient $j \geq 0$, $(v_0, v_1, \dots, v_j) \in \Omega_j$ et $u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} \in \mathbb{U}$ on a la relation :

$$(III.1) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) T_{j+1}^j(v_0, v_1, \dots, v_j; d\omega_{j+1}) \\ &= \int_{\mathbb{X}} Q^j[v_0, \varepsilon_1^{u_1}(v_1), \varepsilon_2^{u_1, u_2}(v_2), \dots, \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(v_j), u_1, u_2, \dots, u_{j+1}, dx_{j+1}] \\ & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}[\omega_j, \sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] T_{j+1}^j(v_0, v_1, \dots, v_j; d\omega_j \times dv_{j+1}) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

D'après la remarque II.4.2. :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) T_{j+1}^j(v_0, v_1, \dots, v_j; d\omega_{j+1}) \\ &= \int_{\mathbb{V}_{j+1}} \varphi_{j+1}(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}) S^j(v_0, v_1, \dots, v_j; dv_{j+1}) \\ \text{et :} & \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}[\omega_j, \sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] T_{j+1}^j(v_0, v_1, \dots, v_j; d\omega_j \times dv_{j+1}) \\ &= \int_{\mathbb{V}_{j+1}} \varphi_{j+1}[v_0, v_1, \dots, v_j, \sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] \\ & \quad S^j(v_0, v_1, \dots, v_j; dv_{j+1}) \end{aligned}$$

Pour montrer la relation (III.1), il suffit donc de montrer que pour toute fonction réelle positive mesurable φ_{j+1} définie sur $(\mathbb{V}_{j+1}, \mathcal{U}_{j+1})$ on a l'identité :

$$(III.2) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{V}_{j+1}} \varphi_{j+1}(v_{j+1}) S^j(v_0, v_1, \dots, v_j; dv_{j+1}) \\ &= \int_{\mathbb{X}} Q^j[v_0, \varepsilon_1^{u_1}(v_1), \dots, \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(v_j), u_1, u_2, \dots, u_{j+1}; dx_{j+1}] \\ & \quad \int_{\mathbb{V}_{j+1}} \varphi_{j+1}[\sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] S^j(v_0, v_1, \dots, v_j; dv_{j+1}) \end{aligned}$$

quels que soient $(v_0, v_1, \dots, v_j) \in \Omega_j$ et $u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} \in \mathbb{U}$.

D'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale :

- 1 - il suffit de montrer la relation (III.2) lorsque $\varphi_{j+1} = 1_{B_{j+1}}$ avec $B_{j+1} \in \mathcal{U}_{j+1}$.
- 2 - la classe des $B_{j+1} \in \mathcal{U}_{j+1}$ tels que la relation (III.2) soit vraie avec $\varphi_{j+1} = 1_{B_{j+1}}$ est une classe σ -additive (cf. annexe, II).

D'après le lemme II.1 de l'annexe, il suffit donc finalement de montrer que cette classe contient la semi-algèbre $\mathcal{U}_{j+1}^0$ des pavés mesurables de $\mathcal{U}_{j+1}$.

Or, si $\Psi_{j+1} = 1_{B_{j+1}}$ avec $B_{j+1} \in \mathcal{U}_{j+1}^0$, la formule (III.2) se réduit à :

$$(III.3) \quad \begin{aligned} & S^j (v_0, v_1, \dots, v_j ; B_{j+1}) \\ &= Q^j [v_0, \varepsilon_1^{u_1}(v_1), \dots, \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(v_j), u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} ; \varepsilon_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1})] \\ &\quad \times S^j [v_0, v_1, \dots, v_j ; \sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1}, \mathbb{X})] \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} & 1_{B_{j+1}} [\sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] \\ &= 1 [\varepsilon_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1})]^{(x_{j+1})} \times 1 [\sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1}, \mathbb{X})]^{(v_{j+1})} \end{aligned}$$

Rappelons alors que :

$$\varepsilon_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}} [\sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1}, \mathbb{X})] = \mathbb{X}$$

et si $(u'_1, u'_2, \dots, u'_{j+1}) \neq (u_1, u_2, \dots, u_{j+1}) :$

$$\varepsilon_{j+1}^{u'_1, u'_2, \dots, u'_{j+1}} [\sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1}, \mathbb{X})] = \varepsilon_{j+1}^{u'_1, u'_2, \dots, u'_{j+1}}(B_{j+1})$$

(remarque II.2).

Comme :

$$Q^j [v_0, \varepsilon_1^{u_1}(v_1), \dots, \varepsilon_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(v_j), u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} ; \mathbb{X}] = 1$$

on a donc par définition même de S^j (voir alinéa II.4) :

$$\begin{aligned} & S^j [v_0, v_1, \dots, v_j ; \sigma_{j+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{j+1}}(B_{j+1}, \mathbb{X})] \\ &= \prod_{(u'_1, u'_2, \dots, u'_{j+1}) \in \mathbb{L}^{j+1} \atop \neq (u_1, u_2, \dots, u_{j+1})} Q^j [v_0, \varepsilon_1^{u'_1}(v_1), \dots, \varepsilon_j^{u'_1, u'_2, \dots, u'_j}(v_j), \\ &\quad u'_1, u'_2, \dots, u'_j, u'_{j+1} ; \varepsilon_{j+1}^{u'_1, u'_2, \dots, u'_{j+1}}(B_{j+1})] \end{aligned}$$

La relation (III.3) apparaît alors comme la relation (II.1) de définition de S^j .

C.Q.F.D.

III.2. Propriétés de P_j^i

LEMME III.2.1

Soient φ_i et ψ_i deux fonctions réelles positives mesurables définies sur $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$. Quels que soient $i \geq 0$, $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{L}$, on a :

$$(III.4) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \varphi_i(\omega_i) \psi_i(\omega_i) P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i) \\ &= \int_{\Omega_i} \varphi_i [\Sigma_i^{u_1, u_2, \dots, u_i}(\omega_i ; x_0, x_1, \dots, x_i)] \psi_i(\omega_i) \\ &\quad P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

Remarquons d'abord que le résultat est vrai pour $i=0$. En effet $\Sigma_0(\omega_0, x_0) = x_0$ et par suite, d'après la remarque II.5.1 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \varphi_0(\omega_0) \psi_0(\omega_0) P_0^0(x_0 ; d\omega_0) = \varphi_0(x_0) \psi_0(x_0) \\ &= \varphi_0(x_0) \int_{\Omega_0} \psi_0(\omega_0) P_0^0(x_0 ; d\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \varphi_0 [\Sigma_0(\omega_0, x_0)] \psi_0(\omega_0) P_0^0(x_0 ; d\omega_0) \end{aligned}$$

Nous allons donc supposer que la formule (III.4) est vraie pour i , quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathcal{U}$ et φ_i et ψ_i positives $\mathcal{F}_i$ -mesurables, et montrer qu'alors cette formule est encore vraie pour $i+1$, quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{i+1} \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{i+1} \in \mathcal{U}$ et φ_{i+1} et ψ_{i+1} positives $\mathcal{F}_{i+1}$ -mesurables.

Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} & \varphi_{i+1} \left\{ \sum_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}); x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1} \right] \right\} \\ &= \varphi_{i+1} \left\{ \sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} \left[\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i \right], \right. \\ & \quad \left. \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}} \left[\sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}), x_{i+1} \right] \right\} \\ &= \varphi_{i+1} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i), \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right] \end{aligned}$$

D'après la remarque II.5.3, la formule (III.4) (écrite pour $i+1$) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+1}} \varphi_{i+1} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right] \\ & \quad \varphi_{i+1} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right] \\ & \quad P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i \times dv_{i+1}) \\ &= \int_{\Omega_{i+1}} \varphi_{i+1} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i), \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right] \\ & \quad \varphi_{i+1} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right] \\ & \quad P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i \times dv_{i+1}) \end{aligned} \quad (III.5)$$

Montrons maintenant que notre hypothèse de récurrence implique :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+1}} \tilde{\varphi}_{i+1}(\omega_{i+1}) \tilde{\psi}_{i+1}(\omega_{i+1}) P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_{i+1}) \\ &= \int_{\Omega_{i+1}} \tilde{\varphi}_{i+1} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i, x_0, x_1, \dots, x_i), v_{i+1} \right] \tilde{\psi}_{i+1}[\omega_i, v_{i+1}] \\ & \quad P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i \times dv_{i+1}) \end{aligned} \quad (III.6)$$

pour $\tilde{\varphi}_{i+1}$ et $\tilde{\psi}_{i+1}$ positives $\mathcal{F}_{i+1}$ -mesurables quelconques.

Considérons d'abord le cas où $\tilde{\varphi}_{i+1}$ est de la forme :

$$\tilde{\varphi}_{i+1} = 1_{F_i \times B_{i+1}} \quad \text{où} \quad F_i \in \mathcal{F}_i \quad \text{et} \quad B_{i+1} \in \mathcal{V}_{i+1}$$

D'après la remarque II.5.2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+1}} 1_{F_i \times B_{i+1}}(\omega_{i+1}) \tilde{\varphi}_{i+1}(\omega_{i+1}) P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_{i+1}) \\ &= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad \int_{\Omega_{i+1}} 1_{F_i \times B_{i+1}}(\omega_{i+1}) \tilde{\varphi}_{i+1}(\omega_{i+1}) T_{i+1}^i(\omega_i; d\omega_{i+1}) \end{aligned}$$

ou, d'après la remarque II.4.2 :

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad 1_{F_i}(\omega_i) \int_{\mathcal{V}_{i+1}} 1_{B_{i+1}}(v_{i+1}) \tilde{\varphi}_{i+1}(\omega_i, v_{i+1}) S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \end{aligned}$$

ou, d'après notre hypothèse de récurrence :

$$= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) 1_{F_i} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i) \right] \\ \int_{V_{i+1}} 1_{B_{i+1}}(v_{i+1}) \tilde{\Psi}_{i+1}(\omega_i, v_{i+1}) S^i(\omega_i; dv_{i+1})$$

ou d'après la remarque II.4.2 :

$$= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ \int_{\Omega_{i+1}} 1_{F_i \times B_{i+1}} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i'; x_0, x_1, \dots, x_i), v_{i+1} \right] \\ \tilde{\Psi}_{i+1}(\omega_i', v_{i+1}) T_{i+1}^i(\omega_i; d\omega_i' \times dv_{i+1})$$

ou enfin d'après la remarque II.5.2 :

$$= \int_{\Omega_{i+1}} 1_{F_i \times B_{i+1}} \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i), v_{i+1} \right] \\ \tilde{\Psi}_{i+1}(\omega_i, v_{i+1}) P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i \times dv_{i+1})$$

On vérifie par ailleurs facilement, dans le cas où $\tilde{\Psi}_{i+1}$ est borné, que la classe des $F_{i+1} \in \mathcal{F}_{i+1}$ tels que (III.6) soit vraie pour $\tilde{\Psi}_{i+1} = 1_{F_{i+1}}$ constitue une classe σ -additive (cf. annexe, II). D'après ce qui précède, elle contient la classe des F_{i+1} de la forme $F_{i+1} = F_i \times B_{i+1}$ où $F_i \in \mathcal{F}_i$ et $B_{i+1} \in \mathcal{U}_{i+1}$, qui est stable par intersection finie et qui engendre $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i \otimes \mathcal{U}_{i+1}$.

D'après le lemme II.1 de l'annexe, elle coïncide donc avec $\mathcal{F}_{i+1}$.

D'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, la formule (III.6) est donc vraie pour $\tilde{\Psi}_{i+1}$ et $\tilde{\Psi}_{i+1}$ positives $\mathcal{F}_{i+1}$ -mesurables quelconques.

Pour obtenir la formule (III.5) (équivalente à (III.4)), il suffit alors d'appliquer la formule (III.6) avec :

$$\tilde{\Psi}_{i+1}(\omega_i, v_{i+1}) = \Psi_{i+1} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right]$$

$$\tilde{\Psi}_{i+1}(\omega_i, v_{i+1}) = \Psi_{i+1} \left[\omega_i, \sigma_{i+1}^{u_1, u_2, \dots, u_{i+1}}(v_{i+1}, x_{i+1}) \right]$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE III.2.2.

Soient θ et Ψ_j deux fonctions réelles positives mesurables définies respectivement sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$. Quels que soient $j \geq i \geq 0$ et $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in L^1$, on a :

$$\int_{\Omega_j} \theta \left[X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i) \right] \Psi_j(\omega_j) \\ P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ = \theta(x_i) \int_{\Omega_j} \Psi_j(\omega_j) P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j)$$

DEMONSTRATION :

Pour $j=i$ le résultat cherché est une conséquence immédiate du lemme III.2.1. Il suffit en effet d'appliquer la formule (III.4) avec :

$$\varphi_i(\omega_i) = \theta \left[X_i^i(\omega_i, u_1, u_2, \dots, u_i) \right]$$

et de remarquer que :

$$X_i^i \left[\sum_i^{u_1, u_2, \dots, u_i} (\omega_i; x_0, x_1, \dots, x_i), u_1, u_2, \dots, u_i \right] = x_i$$

Pour $j \geq i+1$ on a, d'après la remarque II.5.2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_j} \theta [X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)] \Psi_j(\omega_j) \\ & \quad P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ &= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad \int_{\Omega_j} \theta [X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)] \Psi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \end{aligned}$$

Or, d'après la remarque II.4.2 :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_j} \theta [X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)] \Psi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \\ &= \int_{W_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{W_{i+2}} S^{i+1}(\omega_i, v_{i+1}; dv_{i+2}) \int_{W_{i+3}} \dots \\ & \quad \dots \int_{W_j} S^{j-1}(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \\ & \quad \theta [X_i^j(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, u_1, u_2, \dots, u_i)] \Psi_j(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j) \end{aligned}$$

ou, d'après la remarque II.3 :

$$\begin{aligned} &= \theta [X_i^i(\omega_i, u_1, u_2, \dots, u_i)] \int_{W_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{W_{i+2}} \dots \\ & \quad \dots \int_{W_j} S^{j-1}(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \Psi_j(\omega_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j) \\ &= \theta [X_i^i(\omega_i, u_1, u_2, \dots, u_i)] \int_{\Omega_j} \Psi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_j} \theta [X_i^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)] \Psi_j(\omega_j) \\ & \quad P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ &= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad \theta [X_i^i(\omega_i, u_1, u_2, \dots, u_i)] \int_{\Omega_j} \Psi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \end{aligned}$$

ou encore, puisque le corollaire est vrai pour $j=i$:

$$\begin{aligned} &= \theta(x_i) \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \\ & \quad \int_{\Omega_j} \Psi_j(\omega_j) T_j^i(\omega_i; d\omega_j) \end{aligned}$$

ou enfin, d'après la remarque II.5.2 :

$$= \theta(x_i) \int_{\Omega_j} \Psi_j(\omega_j) P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

LEMME III, 2.3.

Pour toute fonction réelle positive mesurable φ_{j+1} définie sur $(\Omega_{j+1}, \mathcal{F}_{j+1})$ on a, quels que soient $j \geq 0$, $x_0, x_1, \dots, x_j \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) P_{j+1}^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_{j+1}) \\ &= \int_{\mathcal{X}} Q^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\ & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) P_{j+1}^{j+1}(x_0, x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; d\omega_{j+1}) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION :

D'après la remarque II,5.2 :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) P_{j+1}^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_{j+1}) \\
 &= \int_{\Omega_j} P_j^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j) \\
 & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) T_{j+1}^j(\omega_j; d\omega_{j+1})
 \end{aligned}$$

ou d'après le lemme III,2.1 :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_j} P_j^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j) \\
 & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}(\omega_{j+1}) T_{j+1}^j[\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(\omega_j; x_0, x_1, \dots, x_j); d\omega_{j+1}]
 \end{aligned}$$

ou, d'après le lemme III.1 et la remarque II,2 :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_j} P_j^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j) \\
 & \quad \int_{\mathbb{X}} Q^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\
 & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}[\omega_j', \sigma_{j+1}^{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] \\
 & \quad T_{j+1}^j[\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(\omega_j; x_0, x_1, \dots, x_j); d\omega_j' \times dv_{j+1}]
 \end{aligned}$$

ou en échangeant l'ordre des intégrations par rapport à ω_j et x_{j+1} :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{X}} Q^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\
 & \quad \int_{\Omega_j} P_j^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j) \\
 & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}[\omega_j', \sigma_{j+1}^{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] \\
 & \quad T_{j+1}^j[\sum_j^{u_1, u_2, \dots, u_j}(\omega_j; x_0, x_1, \dots, x_j); d\omega_j' \times dv_{j+1}]
 \end{aligned}$$

ou, d'après le lemme III,2.1 :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{X}} Q^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\
 & \quad \int_{\Omega_j} P_j^j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j) \\
 & \quad \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1}[\omega_j', \sigma_{j+1}^{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}}(v_{j+1}, x_{j+1})] \\
 & \quad T_{j+1}^j[\omega_j; d\omega_j' \times dv_{j+1}]
 \end{aligned}$$

ou enfin, d'après la remarque II,5.2.:

$$= \int_{\mathbb{X}} Q^j (x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\ \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1} [\omega_j, \sigma_{j+1}^{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}} (v_{j+1}, x_{j+1})] \\ P_{j+1}^j (x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j; d\omega_j \times dv_{j+1})$$

et, d'après la remarque II,5.3 :

$$= \int_{\mathbb{X}} Q^j (x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; dx_{j+1}) \\ \int_{\Omega_{j+1}} \varphi_{j+1} (\omega_{j+1}) P_{j+1}^{j+1} (x_0, x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, u_1, u_2, \dots, u_j, u_{j+1}; d\omega_{j+1})$$

C.Q.F.D.

THEOREME III,2.4

Pour tout $A \in \mathcal{X}$ et tout $F_j \in \mathcal{F}_j$ on a, quel que soit $j \geq 0$:

$$(III.7) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_0^j (\omega_j)] 1_{F_j} (\omega_j) P_j (d\omega_j) \\ = \int_{\mathbb{X}} 1_A (x_0) P_j^0 (x_0; F_j) P_0 (dx_0)$$

et quels que soient $i \geq 0$, $j \geq i+1$ et $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathbb{U}$:

$$(III.8) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_{i+1}^j (\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] 1_{F_j} (\omega_j) \\ P_j^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ = \int_{\mathbb{X}} 1_A (x_{i+1}) P_j^{i+1} (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; F_j) \\ Q^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; dx_{i+1})$$

DEMONSTRATION :

D'après le corollaire III,2.2, on a, quels que soient $j \geq k \geq 0$:

$$1_A (x_k) P_j^k (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; F_j) \\ = \int_{\Omega_j} 1_A [X_k^j (\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_k)] 1_{F_j} (\omega_j) \\ P_j^k (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega_j)$$

$$= P_j^k (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; \tilde{F}_j^k)$$

où $\tilde{F}_j^k = \left\{ \bigvee_0 \times \bigvee_1 \times \dots \times \bigvee_{k-1} \times \sigma_{\mathcal{K}}^{u_1, u_2, \dots, u_k} (\bigvee_k, A) \times \bigvee_{k+1} \times \bigvee_{k+2} \dots \times \bigvee_j \right\} \cap F_j$

On en déduit que l'on peut se contenter de montrer les relations (III.7) et (III.8) dans le cas particulier où $A = \mathcal{K}$. Il suffira en effet de remplacer F_j par $\tilde{F}_j^0$ et $\tilde{F}_j^{i+1}$ pour obtenir les relations dans le cas général.

Montrons d'abord la relation (III.7), pour $A = \mathcal{K}$. Par définition de P_j° :

$$\int_{\Omega_j} 1_{F_j}(\omega_j) P_j^{\circ}(d\omega_j) = \int_{\Omega_0} T_j^{\circ}(\omega_0; F_j) P_0^{\circ}(d\omega_0)$$

Par définition de P_j° :

$$P_j^{\circ}(x_0; F_j) = \int_{\Omega_0} T_j^{\circ}(\omega_0; F_j) P_0^{\circ}(x_0; d\omega_0)$$

c'est-à-dire, d'après la remarque II.5.1 :

$$= T_j^{\circ}(x_0; F_j)$$

On a donc bien :

$$\int_{\Omega_j} 1_{F_j}(\omega_j) P_j^{\circ}(d\omega_j) = \int_{\mathcal{K}} P_j^{\circ}(x_0; F_j) P_0^{\circ}(dx_0)$$

Montrons maintenant la relation (III.8), pour $A = \mathcal{K}$. Par définition de P_j^i :

$$P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; F_j) = \int_{\Omega_i} T_j^i(\omega_i; F_j) P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i)$$

ou, d'après la remarque II.4.3 :

$$= \int_{\Omega_i} P_i^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_i) \int_{\Omega_{i+1}} T_j^{i+1}(\omega_{i+1}; F_j) T_{i+1}^i(\omega_i; d\omega_{i+1})$$

ou, d'après la remarque II.5.2 :

$$= \int_{\Omega_{i+1}} T_j^{i+1}(\omega_{i+1}; F_j) P_{i+1}^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_{i+1})$$

ou, d'après le lemme III.2.3 :

$$= \int_{\mathcal{K}} Q^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; dx_{i+1}) \int_{\Omega_{i+1}} T_j^{i+1}(\omega_{i+1}; F_j) P_{i+1}^{i+1}(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; d\omega_{i+1})$$

ou enfin, par définition de P_j^{i+1} :

$$= \int_{\mathcal{X}} P_j^{i+1} (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; F_j) \\ Q^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; dx_{i+1})$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE III,2.5.

Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a, quel que soit $j \geq 0$:

$$(III.9) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_o^j(\omega_j)] P_j(dw_j) = P_o(A)$$

et quels que soient $i \geq 0$, $j \geq i+1$, $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathbb{U}$:

$$(III.10) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_{i+1}^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; dw_j) \\ = Q^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; A)$$

Pour tous $A \in \mathcal{X}$ et $F_j \in \mathcal{F}_j$, on a, quel que soit $j \geq 0$:

$$(III.11) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_o^j(\omega_j)] 1_{F_j}(\omega_j) P_j(dw_j) \\ = \int_{\Omega_j} 1_A [X_o^j(\omega_j)] P_j^o[X_o^j(\omega_j); F_j] P_j(dw_j)$$

et quels que soient $i \geq 0$, $j \geq i+1$, $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathbb{U}$:

$$(III.12) \quad \int_{\Omega_j} 1_A [X_{i+1}^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] 1_{F_j}(\omega_j) P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; dw_j) \\ = \int_{\Omega_j} 1_A [X_{i+1}^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] \\ P_j^{i+1}[x_0, x_1, \dots, x_i, X_{i+1}^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_{i+1}), u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; F_j] \\ P_j^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; dw_j)$$

DÉMONSTRATION:

Les relations (III.9) et (III.10) ne sont autres que les relations (III.7) et (III.8) du théorème III,2.4 écrites dans le cas particulier où $F_j = \Omega_j$.

D'après les propriétés de linéarité et de convergence de l'intégrale, on en déduit que, pour toute fonction réelle positive mesurable θ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, on a:

$$\int_{\Omega_j} \theta [X_o^j(\omega_j)] P_j(dw_j) = \int_{\mathcal{X}} \theta(x_0) P_o(dx_0)$$

et :

$$\int_{\Omega_j} \theta [X_{i+1}^j (\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] P_j^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega_j) \\ = \int_{\mathbb{X}} \theta (x_{i+1}) Q^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; dx_{i+1})$$

Les relations (III.11) et (III.12) se déduisent alors des relations (III.7) et (III.8) du théorème II.2.4 en appliquant les deux identités précédentes avec respectivement :

$$\theta (\cdot) = 1_A (\cdot) P_j^0 (\cdot; F_j)$$

et :

$$\theta (\cdot) = 1_A (\cdot) P_j^{i+1} (x_0, x_1, \dots, x_i, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; F_j)$$

C.Q.F.D.



IV - CONSTRUCTION DU PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE CHERCHÉ

IV,1. Horizon fini

Supposons d'abord que le processus aléatoire à commande que l'on veut construire a pour horizon N (on ne s'est donné les probabilités de transition Q^j que de $j=0$ à $j=N-1$).

Dans ce cas, on prend alors simplement :

- pour espace de probabilité global :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$$

- pour processus aléatoire à commande :

$$\{X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_N\} = \{X_0^N, X_1^N, \dots, X_k^N, \dots, X_N^N\}$$

On posera en outre :

$$P^0 = P_N^0, \quad P^1 = P_N^1, \quad \dots, \quad P^k = P_N^k, \quad \dots, \quad P^N = P_N^N$$

THEOREME IV.1

Dans le cas d'un horizon fini N , l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, le processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_N)$ et les probabilités de transition $P^0, P^1, \dots, P^N$ que nous venons de définir vérifient les conditions 1), 2), 3) et 4) du paragraphe I.

DEMONSTRATION :

Ce théorème est une conséquence immédiate du corollaire III,2.5, utilisé avec $j=N$. En particulier :

- la formule (III.9) assure que la condition 1) est remplie ;
- la formule (III.10) assure que la condition 3) est remplie
- les formules (III.11) et (III.12) assurent que la condition 4) est remplie.

Enfin les conditions 3) et 4) impliquent la condition 2).

C.Q.F.D.

IV,2. Horizon infini

Supposons maintenant que le processus aléatoire à commande cherché soit à horizon infini (on s'est donné les probabilités de transition Q^j pour tout $j \geq 0$).

Dans ce cas on prend pour espace probabilisable global :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{V}_j, \mathcal{U}_j)$$

On conviendra d'identifier :

- l'ensemble F_j appartenant à la σ -algèbre $\mathcal{F}_j$ et le cylindre de base F_j appartenant à la σ -algèbre $\mathcal{F}$:

$$F_j \times \prod_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{V}_k$$

que l'on notera désormais simplement F_j .

- la σ -algèbre $\mathcal{F}_j$ et la sous σ -algèbre des cylindres appartenant à $\mathcal{F}$, dont la base appartient à $\mathcal{F}_j$:

$$\left\{ F_j \times \prod_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{V}_k ; F_j \in \mathcal{F}_j \right\}$$

que l'on notera désormais simplement $\mathcal{F}_j$.

Pour pouvoir définir sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la probabilité et les probabilités de transition adéquates, on a besoin du lemme suivant, conséquence immédiate du théorème de Ionescu Tulcea (cf. Neveu [23], proposition V.1.1, p. 145).

LEMME IV,2.1.

Il existe une suite $T^0, T^1, \dots, T^j, \dots$ de probabilités de transition :

$$T^j : (\Omega_j, \mathcal{F}_j) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

telle que, quels que soient $j \geq i \geq 0$ et $\omega_i \in \Omega_i$, la restriction à $\mathcal{F}_j$ de la probabilité $T^i(\omega_i; \cdot)$ soit identique à la probabilité $T_j^i(\omega_i; \cdot)$.

DÉMONSTRATION :

D'après le théorème de Ionescu Tulcea, il existe, quel que soit $i \geq 0$, une probabilité de transition :

$$T^i : (\Omega_i, \mathcal{F}_i) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

telle que, quel que soit $j \geq i$, on ait, pour tout $\omega_i \in \Omega_i$ et tout $F_j \in \mathcal{F}_j$:

1 - si $j = i$:

$$T^i(\omega_i; F_i) = 1_{F_i}(\omega_i)$$

2 - si $j \geq i+1$:

$$\begin{aligned} T^i(\omega_i; F_j) &= \int_{V_{i+1}} S^i(\omega_i; dv_{i+1}) \int_{V_{i+2}} S^{i+1}(\omega_i, v_{i+1}; dv_{i+2}) \int \dots \\ &\dots \int_{V_j} 1_{F_j}(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, v_j) S^j(\omega_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}; dv_j) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par définition même de T_j^i : (voir remarque II,4.2)

$$T^i(\omega_i; F_j) = T_j^i(\omega_i; F_j)$$

C.Q.F.D.



On définit alors successivement :

• la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant, pour tout $F \in \mathcal{F}$:

$$P(F) = \int_{\mathbb{X}} T^0(x_0; F) P_0(dx_0)$$

P est bien une probabilité d'après le corollaire III.3 de l'annexe.

• le processus aléatoire à commande sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ en posant pour tous $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$ et tous $\omega_j \in \Omega_j$, $v_{j+1} \in V_{j+1}$, $v_{j+2} \in V_{j+2}$, $v_{j+3} \in V_{j+3}$, ... :

$$X_j[(\omega_j, v_{j+1}, v_{j+2}, v_{j+3}, \dots), u_1, u_2, \dots, u_j] = X_j^j(\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_j)$$

X_j est donc $(\mathcal{F}_j \otimes \mathcal{U}^j)$ -mesurable et par suite est bien à plus forte raison $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^j)$ -mesurable.

• les probabilités de transition $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$

$$P^j : (\mathbb{X}, \mathbb{X})^{j+1} \times (\mathbb{U}, \mathbb{U})^j \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{F})$$

en posant, pour tous $x_0, x_1, \dots, x_j \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathbb{U}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} & P^j (x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j ; F) \\ &= \int_{\Omega_j} T^j (\omega_j ; F) P_j^j (x_0, x_1, \dots, x_j, u_1, u_2, \dots, u_j ; d\omega_j) \end{aligned}$$

D'après le lemme III.4 de l'annexe, les P^j sont bien des probabilités de transition.

REMARQUE IV.2.2.

D'après la remarque II.3, quels que soient $j \geq i \geq 0$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{U}$ et $\omega_j \in \Omega_j$, $v_{j+1} \in \mathbb{V}_{j+1}$, $v_{j+2} \in \mathbb{V}_{j+2}$, ... :

$$X_i [(\omega_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots), u_1, u_2, \dots, u_i] = X_i^j (\omega_j, u_1, u_2, \dots, u_i)$$

REMARQUE IV.2.3

Par définition, pour tout $F_j \in \mathcal{F}_j$, on a, quel que soit $j \geq 0$:

$$P(F_j) = \int_{\Omega_0} T^0(\omega_0; F_j) P_0(d\omega_0) = \int_{\Omega_0} T_j^0(\omega_0; F_j) P_0(d\omega_0) = P_j(F_j)$$

et quels que soient $j \geq i \geq 0$ et $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} & P^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; F_j) \\ &= \int_{\Omega_i} T^i (\omega_i ; F_j) P_i^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i) \\ &= \int_{\Omega_i} T_j^i (\omega_i ; F_j) P_i^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_i) \\ &= P_j^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; F_j) \end{aligned}$$

On a donc plus généralement, pour toute fonction φ réelle positive sur Ω et $\mathcal{F}_j$ -mesurable :

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega_j} \varphi(\omega_j) P_j(d\omega_j)$$

et :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi(\omega) P^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega) \\ &= \int_{\Omega_j} \varphi(\omega_j) P_j^i (x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i ; d\omega_j) \end{aligned}$$

quels que soient $j \geq i \geq 0$ et $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i \in \mathbb{U}$

THÉORÈME IV.2.4

Dans le cas d'un horizon infini, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, le processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ et les probabilités de transition $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ que nous venons de définir vérifient les conditions 1), 2), 3) et 4) du paragraphe I.

DEMONSTRATION :

D'après les remarques IV.2.2 et IV.2.3 les formules (III.9) et (III.10) du corollaire III.2.5 impliquent :

$$\int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] P(d\omega) = P_0(A)$$

et :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_{i+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] P^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega) \\ &= Q^i[x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}; A] \end{aligned}$$

quels que soient $i \geq 0$, $A \in \mathcal{X}$ et $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathcal{U}$.

Les conditions 1) et 3) du paragraphe I sont donc vérifiées.

Soit $\mathcal{Y}$ la classe des ensembles $F \in \mathcal{F}$ tels que les deux égalités suivantes soient vérifiées quels que soient $i \geq 0$, $A \in \mathcal{X}$, $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathcal{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] P^0[X_0(\omega); F] P(d\omega) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A [X_{i+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] 1_F(\omega) P^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A [X_{i+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1})] \\ & \quad P^{i+1}[x_0, x_1, \dots, x_i, X_{i+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{i+1}), u_1, u_2, \dots, u_{i+1}; F] \\ & \quad P^i(x_0, x_1, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i; d\omega) \end{aligned}$$

D'après les remarques IV.2.2 et IV.2.3, ces deux relations découlent respectivement des relations (III.11) et (III.12) du corollaire III.2.5, lorsque $F \in \mathcal{F}_j$, $j \geq i+1$.

Donc $\mathcal{Y}$ contient l'algèbre $\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_j$ qui engendre la σ -algèbre $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, on peut vérifier facilement que $\mathcal{Y}$ est une classe σ -additive. D'après le lemme II.1 de l'annexe $\mathcal{Y} = \mathcal{F}$

On en déduit que la condition 4) du paragraphe I est vérifiée.

Les conditions 3) et 4) impliquent la condition 2).

C.Q.F.D.



Chapitre 4

UTILISATIONS DE LA FORMULE DE BAYES

I - PRÉLIMINAIRES

I.1. Introduction

Dans les chapitres 1 et 2, nous nous sommes préoccupés de l'existence de probabilité ou de suites de probabilités conditionnelles « régulières » par rapport à des variables ou des processus aléatoires à commande.

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de leur construction effective. Nous ferons des hypothèses qui pourront paraître restrictives, mais sont souvent vérifiées dans la pratique. L'idée d'utiliser la formule de Bayes pour ce calcul n'est évidemment pas nouvelle, mais cela n'avait pas encore été fait, à notre connaissance, avec toute la rigueur ou la généralité possible (cf. Aoki [1], V.3 et Striebel [26]).

La démonstration de la formule de Bayes fait intervenir largement la règle du changement de variable dans les intégrales, que nous rappelons ci-dessous.

I.2. Changement de variable dans les intégrales

Soient $(\mathcal{W}, \mathcal{W}, \nu)$ un espace mesurable muni d'une mesure positive, $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable, Y une application mesurable de $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. Rappelons qu'on appelle mesure image de ν par Y , et qu'on note νY^{-1} la mesure positive définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ en posant, pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$(\nu Y^{-1})(B) = \nu [Y^{-1}(B)]$$

et qu'on a alors, pour toute fonction réelle positive mesurable φ sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$:

$$\int_{\mathcal{W}} \varphi [Y(w)] \nu(dw) = \int_{\mathcal{Y}} \varphi(y) \nu Y^{-1}(dy)$$

(cf. Halmos [14], paragraphe 3.9, p. 163, theorem C).

Le théorème de Radon Nicodym, rappelé au paragraphe IV de l'annexe, implique alors de façon immédiate le résultat suivant (cf. Halmos, paragraphe 3.9, p. 164, theorem D).

LEMME I.2.1.

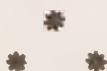
Supposons l'espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ muni d'une mesure positive σ -finie λ .

Si la mesure νY^{-1} (image de ν par l'application mesurable Y de $(\mathcal{W}, \mathcal{W}, \nu)$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$) est absolument continue par rapport à λ , c'est-à-dire si pour tout $B \in \mathcal{Y}$ tel que $\lambda(B) = 0$ on a $\nu Y^{-1}(B) = 0$, alors il existe une fonction réelle positive mesurable f sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ telle que l'identité:

$$\int_{\mathcal{W}} \varphi [Y(w)] \nu(dw) = \int_{\mathcal{Y}} \varphi(y) f(y) \lambda(dy)$$

soit vérifiée pour toute fonction réelle positive mesurable φ sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Cette fonction f n'est autre qu'un représentant quelconque de la dérivée de Radon Nicodym de νY^{-1} par rapport à λ .



Par abus de langage, nous appellerons encore dérivée de Radon Nicodym le représentant f , et nous le noterons désormais :

$$\frac{\partial(\nu Y^{-1})}{\partial \lambda}$$

REMARQUE 1,2.2.

Rappelons que, si νY^{-1} est σ -finie, $\partial \nu Y^{-1} / \partial \lambda$ peut être choisie finie. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que ν soit elle-même σ -finie, que Y soit bijective et que son inverse soit mesurable. (si $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ avec $\nu(W_n) < \infty$ alors $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y(W_n)$ avec $\nu Y^{-1} [Y(W_n)] < \infty$).

*

* *

Il est deux cas particuliers, très importants dans la pratique, pour lesquels la dérivée de Radon Nicodým $\partial \nu Y^{-1} / \partial \lambda$ se calcule facilement :

EXEMPLE 1 : ESPACES FINIS OU DÉNOMBRABLES

Supposons que $W = \mathcal{W} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou $= \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ avec $\mathcal{W} = \mathcal{P}(W)$ $\mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathcal{W})$ (σ -algèbre des parties).

Si, pour tout $y \in \mathcal{Y}$ tel que $\lambda\{y\} = 0$ on a $\nu Y^{-1}\{y\} = 0$ et si $\lambda\{y\} < \infty$ quel que soit $y \in \mathcal{Y}$, alors νY^{-1} admet une dérivée de Radon Nicodým par rapport à λ :

$$\frac{\partial \nu Y^{-1}}{\partial \lambda}(\cdot) = \frac{\nu Y^{-1}\{\cdot\}}{\lambda\{\cdot\}}$$

(avec la convention $\frac{0}{0} = 0$)

EXEMPLE 2 : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Supposons que W et $\mathcal{Y}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, munis de leurs σ -algèbre de Borel $\mathcal{W}$ et $\mathcal{Y}$, que ν et λ sont les mesures de Lebesgue sur W et $\mathcal{Y}$. Alors, pour toute application bijective $Y : W \rightarrow \mathcal{Y}$ continûment différentiable (au sens de Fréchet) ainsi que son inverse, la mesure νY^{-1} est dérivable au sens de Radon. Nicodým par rapport à λ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu Y^{-1}}{\partial \lambda}(\cdot) &= \left| \det \left\{ \frac{\partial (Y^{-1})}{\partial y}(\cdot) \right\} \right| \\ &= \frac{1}{\left| \det \left\{ \frac{\partial Y}{\partial w} [Y^{-1}(\cdot)] \right\} \right|} \end{aligned}$$

On peut trouver la démonstration de ce résultat par exemple dans Dieudonné [9], chapitre XVI, paragraphe 2.2, théorème 16.22.1.



II - FORMULE DE BAYES

Soient $(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mu)$ et $(\mathcal{W}, \mathcal{V}, \nu)$ deux espaces mesurables munis de mesures positives et σ -finies.

Etant donné une fonction réelle positive mesurable p^0 définie sur l'espace produit :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$$

et telle que :

$$\int_{\mathcal{V} \times \mathcal{W}} p^0(v, w) \mu(dv) \nu(dw) = 1$$

on désigne par P^0 la probabilité définie sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant pour tout $F \in \mathcal{F}$:

$$P^0(F) = \int_{\mathcal{V} \times \mathcal{W}} 1_F(v, w) p^0(v, w) \mu(dv) \nu(dw)$$

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P^0)$, à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ muni d'une mesure positive σ -finie λ . On fait sur l'application Y les hypothèses suivantes :

1 - pour tout $v \in \mathcal{V}$ fixé, l'application partielle :

$$Y(v, \cdot) : (\mathcal{W}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

est bijective. On notera son application inverse :

$$W(v, \cdot) : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{W}, \mathcal{V})$$

2 - pour tout $v \in \mathcal{V}$ fixé, la mesure $\nu W(v, \cdot)$ image de ν par l'application $Y(v, \cdot)$ c'est-à-dire la mesure définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ en posant, pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$\nu W(v, B) = \int_{\mathcal{W}} 1_B[Y(v, w)] \nu(dw)$$

est absolument continue par rapport à la mesure λ : elle admet donc une dérivée de Radon Nicodém que l'on notera :

$$\frac{\partial \nu W}{\partial \lambda}(v, \cdot) : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

3 - les applications W et $\frac{\partial \nu W}{\partial \lambda}$ ainsi définies sur l'espace produit : $(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ sont mesurables (par rapport au couple de variables (v, y)).

Moyennant ces hypothèses, il est possible de construire des espérances conditionnelles par rapport à Y , en utilisant une « densité de probabilité conditionnelle » obtenue par la *formule de Bayes*. Cette construction est détaillée dans le théorème suivant :

THEOREME II,1

Considérons successivement la fonction réelle positive mesurable w^1 définie sur $(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ par :

$$w^1(v, y) = p^0[v, W(v, y)] \frac{\partial \nu W}{\partial \lambda}(v, y)$$

et la fonction réelle positive p^1 définie sur $(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ par :

$$p^1(v, y) \left\{ \begin{array}{l} = p(v) \quad \text{si} \quad \int_{\mathcal{W}} w^1(v', y) \mu(dv') = 0 \text{ ou } = +\infty \\ = \frac{w^1(v, y)}{\int_{\mathcal{W}} w^1(v', y) \mu(dv')} \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

où p est une fonction réelle positive mesurable sur $(W, \mathcal{U})$ telle que :

$$\int_W p(v) \mu(dv) = 1$$

(on peut prendre par exemple : $p(v) = \int_W p^\circ(v, w) v(dw)$).

Alors p^1 est mesurable, et pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé, on a :

$$\int_W p^1(v, y) \mu(dv) = 1$$

En outre, quelle que soit la variable aléatoire réelle positive φ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P^\circ)$, si on désigne par Ψ la fonction réelle positive définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ par :

$$\Psi(y) = \int_W \varphi[v, W(v, y)] p^1(v, y) \mu(dv)$$

alors la fonction $\Psi[Y(\cdot)]$ constitue un représentant de l'espérance conditionnelle $E\{\varphi / \mathcal{Y}\}$ et par suite, pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} & \int_{W \times W} 1_B[Y(v, w)] \varphi(v, w) p^\circ(v, w) \mu(dv) v(dw) \\ (II.1) \quad & = \int_{W \times W} 1_B[Y(v, w)] \Psi[Y(v, w)] p^\circ(v, w) \mu(dv) v(dw) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

La fonction positive définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ par l'intégrale :

$$\int_W \varpi^1(v, \cdot) \mu(dv)$$

est mesurable (d'après le théorème de Fubini, voir **Halmos** [14], paragraphe 35, théorème A et paragraphe 36, théorème B, p. 143-147). Par suite les ensembles :

$$\mathcal{N} = \{y \in \mathcal{Y} : \int_W \varpi^1(v, y) \mu(dv) = 0\}$$

et :

$$\mathcal{I} = \{y \in \mathcal{Y} : \int_W \varpi^1(v, y) \mu(dv) = +\infty\}$$

appartiennent à $\mathcal{Y}$. p^1 est donc bien une fonction mesurable sur $(W, \mathcal{U}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ telle que, pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé :

$$\int_W p^1(v, y) \mu(dv) = 1$$

D'après le lemme III.6 et le théorème III.2 de l'annexe, la fonction positive Ψ est bien mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et par suite la variable aléatoire $\Psi[Y(\cdot)]$ est bien $\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{Y})$ -mesurable.

Il reste donc à montrer la relation (II.1) pour tout $B \in \mathcal{Y}$

D'après le théorème de Fubini (cf. **Halmos**, paragraphe 36, theorem B, p. 147), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{W \times W} 1_B[Y(v, w)] \varphi(v, w) p^\circ(v, w) \mu(dv) v(dw) \\ & = \int_W \mu(dv) \int_W 1_B[Y(v, w)] \varphi(v, w) p^\circ(v, w) v(dw) \end{aligned}$$

Cette intégrale s'écrit encore, en remarquant que, par définition de W , on a pour tout $v \in \mathbb{V}$:

$$w = W [v , Y (v, w)]$$

et en appliquant alors la règle du changement de variable (cf. lemme I,2,1) :

$$= \int_{\mathbb{V}} \mu (dv) \int_{\mathbb{Y}} 1_B (y) \varphi [v , W (v, y)] p^0 [v , W (v, y)] \frac{\partial W}{\partial \lambda} (v, y) \lambda (dy)$$

c'est-à-dire, par définition même de ϖ' :

$$= \int_{\mathbb{V}} \mu (dv) \int_{\mathbb{Y}} 1_B (y) \varphi [v , W (v, y)] \varpi' (v, y) \lambda (dy)$$

ou encore, en échangeant l'ordre des intégrations par rapport aux variables v et y (ce qui est autorisé par le théorème de Fubini) :

$$= \int_{\mathbb{Y}} 1_B (y) \lambda (dy) \int_{\mathbb{V}} \varphi [v , W (v, y)] \varpi' (v, y) \mu (dv)$$

De même, d'après le théorème de Fubini et la règle du changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{V} \times \mathbb{W}} 1_B [Y (v, w)] \varphi [Y (v, w)] p^0 (v, w) \mu (dv) \nu (dw) \\ &= \int_{\mathbb{V}} \mu (dv) \int_{\mathbb{Y}} 1_B (y) \varphi (y) \varpi' (v, y) \lambda (dy) \\ &= \int_{\mathbb{Y}} 1_B (y) \varphi (y) \lambda (dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi' (v, y) \mu (dv) \end{aligned}$$

Remarquons alors que, par définition de l'ensemble N :

$$(II.2) \quad \int_{\mathbb{Y}} 1_N (y) \lambda (dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi' (v, y) \mu (dv) = 0$$

et que, par définition de l'ensemble I :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{Y}} 1_I (y) \lambda (dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi' (v, y) \mu (dv) \\ = +\infty & \text{si } \lambda(I) \neq 0 \\ = 0 & \text{si } \lambda(I) = 0 \end{cases}$$

Or, cette dernière intégrale ne peut être infinie, puisqu'elle est majorée par :

$$\int_{\mathbb{Y}} \lambda (dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi' (v, y) \mu (dv)$$

qui vaut, d'après le théorème de Fubini et la règle du changement de variable :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{V}} \mu(dv) \int_{\mathbb{V}} p^0[v, W(v, y)] \frac{\partial v W}{\partial \lambda}(v, y) \lambda(dy) \\
 &= \int_{\mathbb{V}} \mu(dv) \int_{\mathbb{W}} p^0(v, w) v(dw) \\
 &= \int_{\mathbb{V} \times \mathbb{W}} p^0(v, w) \mu(dv) v(dw) = 1
 \end{aligned}$$

On a donc nécessairement :

$$\int_{\mathbb{V}} 1_I(y) \lambda(dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi'(v, y) \mu(dv) = 0$$

On déduit des relations (II.2) et (II.3) que, pour montrer la relation (II.1), c'est-à-dire, d'après nos calculs précédents, la relation :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{V}} 1_B(y) \lambda(dy) \int_{\mathbb{V}} \varphi[v, W(v, y)] \varpi'(v, y) \mu(dv) \\
 &= \int_{\mathbb{V}} 1_B(y) \Psi(y) \lambda(dy) \int_{\mathbb{V}} \varpi'(v, y) \mu(dv)
 \end{aligned}$$

il suffit de montrer :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{V}} 1_B(y) 1_{(N \cup I)^c}(y) \lambda(dy) \\
 &\quad \int_{\mathbb{V}} \varphi[v, W(v, y)] \varpi'(v, y) \mu(dv) \\
 &= \int_{\mathbb{V}} 1_B(y) 1_{(N \cup I)^c}(y) \Psi(y) \lambda(dy) \\
 &\quad \int_{\mathbb{V}} \varpi'(v, y) \mu(dv)
 \end{aligned}$$

Cette relation devient évidente dès que l'on écrit le second membre en y remplaçant $\Psi(y)$ par son expression (pour $y \in (N \cup I)^c$) :

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{V}} 1_B(y) 1_{(N \cup I)^c}(y) \lambda(dy) \\
 &\quad \left\{ \frac{\int_{\mathbb{V}} \varphi[v', W(v', y)] \varpi'(v', y) \mu(dv')}{\int_{\mathbb{V}} \varpi'(v'', y) \mu(dv'')} \int_{\mathbb{V}} \varpi'(v, y) \mu(dv) \right\}
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

REMARQUE II,2.

La formule de Bayes que nous avons donnée au théorème II.1 est peut être plus connue dans sa version sans changement de variable.

Supposons en effet $(W, \mathcal{W}, \nu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ confondus et l'application γ définie par :

$$\gamma(\nu, \omega) = \omega$$

Si on suppose pour simplifier que l'intégrale :

$$\int_{\mathcal{W}} p^0(\nu, \omega) \mu(d\nu)$$

n'est jamais nulle ni infinie, la «densité de probabilité conditionnelle» p^1 est simplement donnée par la formule :

$$p^1(\nu, y) = \frac{p^0(\nu, y)}{\int_{\mathcal{W}} p^0(\nu', y) \mu(d\nu')}$$



III - CONSTRUCTION D'UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE RÉGULIÈRE GÉNÉRALISÉE PAR RAPPORT A UNE VARIABLE ALÉATOIRE A COMMANDE, ET APPLICATIONS

III.1. Principales hypothèses et notations

Soient $(V_0, U_0, \mu_0), (W_0, W_0, \nu_0), (V_1, U_1, \mu_1), (W_1, W_1, \nu_1)$ quatre espaces mesurables munis de mesures positives et σ -finies. On désignera par $(\Omega, \mathcal{F})$ l'espace mesurable produit (que l'on peut appeler espace des bruits) :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (V_0, U_0) \times (W_0, W_0) \times (V_1, U_1) \times (W_1, W_1)$$

On suppose $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une probabilité P absolument continue par rapport à la mesure produit $\mu_0 \otimes \nu_0 \otimes \mu_1 \otimes \nu_1$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction positive mesurable p sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que, pour tout $F \in \mathcal{F}$:

$$P(F) = \int_{\Omega} 1_F(v_0, w_0, v_1, w_1) p(v_0, w_0, v_1, w_1) \mu_0(dv_0) \nu_0(dw_0) \mu_1(dv_1) \nu_1(dw_1)$$

Etant donné un espace mesurable $(Y, \mathcal{Y})$, on suppose d'autre part que l'on s'est donné une probabilité de transition :

$$P^0 : (Y, \mathcal{Y}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

définie de la façon suivante :

$\tilde{W}_0$ étant une application mesurable :

$$\tilde{W}_0 : (V_0, U_0) \times (Y, \mathcal{Y}) \rightarrow (W_0, W_0)$$

p^0 étant une fonction réelle positive mesurable définie sur $(V_0, U_0) \times (V_1, U_1) \times (W_1, W_1) \times (Y, \mathcal{Y})$ telle que, pour tout $y \in Y$:

$$\int_{V_0 \times V_1 \times W_1} p^0(v_0, v_1, w_1, y) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) \nu_1(dw_1) = 1$$

on pose, pour $y \in Y$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$P^0(y; F)$$

$$(III.1) \quad = \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} 1_F[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, w_1] p^0(v_0, v_1, w_1, y) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) \nu_1(dw_1)$$

D'après le lemme III.6 et le corollaire III.5 de l'annexe, P^0 est bien une probabilité de transition du type annoncé.

En pratique, P^0 pourra être une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire ordinaire Y , à valeurs dans $(Y, \mathcal{Y})$, construite comme il sera indiqué à l'alinéa III.3.

Enfin, étant donné un espace mesurable $(X, \mathcal{X})$ et un espace mesurable muni d'une mesure positive et σ -finie, $(\Omega, \mathcal{F})$, on considère une application mesurable :

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \times (L, \mathcal{L}) \rightarrow (X, \mathcal{X})$$

c'est-à-dire une variable aléatoire à commande définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ et à commandes dans $(L, \mathcal{L})$.

On fait sur X les hypothèses suivantes :

1 - pour tous v_0, w_0, v_1, u fixés, l'application partielle :

$$X(v_0, w_0, v_1, \cdot, u) : (W_1, W_1) \rightarrow (X, \mathcal{X})$$

est bijective ; on notera son inverse :

$$W_1^{\otimes} (v_0, w_0, v_1, \cdot, u) : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow (W_1, W_1)$$

- 2 - pour tous v_0, w_0, v_1, u fixés, la mesure $\nu_1 W_1^{\otimes} (v_0, w_0, v_1; \cdot; u)$ définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ en posant pour $A \in \mathcal{X}$:

$$\nu_1 W_1^{\otimes} (v_0, w_0, v_1; A; u) = \int_{W_1} 1_A [X(v_0, w_0, v_1, w_1, u)] \nu_1(dw_1)$$

autrement dit la mesure image de ν_1 par : $X(v_0, w_0, v_1, \cdot, u)$, est absolument continue par rapport à λ_1 ; on notera sa dérivée de Radon-Nicodým :

$$\frac{\partial \nu_1 W_1^{\otimes}}{\partial \lambda_1} (v_0, w_0, v_1, \cdot, u) : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

- 3 - $W_1^{\otimes}(\cdot)$ est une application mesurable et $\partial \nu_1 W_1^{\otimes} / \partial \lambda_1(\cdot)$ une fonction positive mesurable par rapport à l'ensemble de leurs arguments c'est-à-dire sur l'espace produit :

$$(V_0, U_0) \times (W_0, W_0) \times (V_1, U_1) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (U, U)$$

On pose alors pour $v_0 \in V_0, v_1 \in V_1, y \in \mathcal{Y}, w_1 \in W_1, x \in \mathcal{X}, u \in U$:

$$\tilde{X}(v_0, v_1, y, w_1, u) = X[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, w_1, u]$$

et :

$$(III.2) \quad \tilde{W}_1(v_0, v_1, y, x, u) = W_1^{\otimes}[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, x, u]$$

$\tilde{X}$ et $\tilde{W}_1$ ont évidemment les propriétés suivantes :

- 1 - $\tilde{X}(\cdot)$ et $\tilde{W}_1(\cdot)$ sont mesurables par rapport à l'ensemble de leurs arguments
- 2 - pour tous v_0, v_1, y, u fixés, l'application partielle $\tilde{X}(v_0, v_1, y, \cdot, u)$ de (W_1, W_1) dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ est bijective et son inverse est : $\tilde{W}_1(v_0, v_1, y, \cdot, u)$.
- 3 - pour tous v_0, v_1, y, u fixés, la mesure $\nu_1 \tilde{W}_1(v_0, v_1, y; \cdot; u)$ définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ comme image de la mesure ν_1 par l'application $\tilde{X}(v_0, v_1, y, \cdot, u)$ est absolument continue par rapport à λ_1 et sa dérivée de Radon Nicodým vaut en x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1 \tilde{W}_1}{\partial \lambda_1} (v_0, v_1, y, x, u) \\ = \frac{\partial \nu_1 W_1^{\otimes}}{\partial \lambda_1} [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, x, u] \end{aligned}$$

cette dérivée est par suite une fonction positive mesurable par rapport à l'ensemble de ses arguments.

III.2. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à une variable aléatoire à commande.

Soit ϖ' la fonction réelle positive mesurable définie sur $(V_0, U_0) \times (V_1, U_1) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (U, U)$ par :

$$\begin{aligned} (III.3) \quad \varpi' (v_0, v_1, y, x, u) \\ = p^{\circ} [v_0, v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y, x, u), y] \\ \times \frac{\partial \nu_1 \tilde{W}_1}{\partial \lambda_1} (v_0, v_1, y, x, u) \end{aligned}$$

(où $\tilde{W}_1$ est définie par la formule(III.2)).

Soient :

$$N' = \left\{ (y, x, u) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} : \int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} \varpi'(v_0, v_1, y, x, u) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) = 0 \right\}$$

et :

$$I' = \left\{ (y, x, u) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} : \int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} \varpi'(v_0, v_1, y, x, u) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) = +\infty \right\}$$

L'intégrale :

$$\int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} \varpi'(v_0, v_1, \cdot, \cdot, \cdot) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1)$$

définit une fonction positive mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})$. Par suite N' et I' sont des ensembles mesurables appartenant à la σ -algèbre produit : $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{X} \otimes \mathcal{U}$.

Posons alors :

$$\begin{aligned} & p^1(v_0, v_1, y, x, u) \\ (III.4) \quad &= 1_{(N' \cup I')^c}(y, x, u) \times \frac{\varpi'(v_0, v_1, y, x, u)}{\int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} \varpi'(v_0', v_1', y, x, u) \mu_0(dv_0') \mu_1(dv_1')} \\ &+ 1_{(N' \cup I')}(y, x, u) \int_{\mathcal{W}_0 \times \mathcal{W}_1} p(v_0, v_1, w_0, w_1) \nu_0(dw_0) \nu_1(dw_1) \end{aligned}$$

p^1 est encore une fonction réelle positive mesurable sur $(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0) \times (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et quels que soient $y \in \mathcal{Y}, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$ on a :

$$\int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} p^1(v_0, v_1, y, x, u) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) = 1$$

Par suite, d'après le lemme III.6 et le corollaire III.5 de l'annexe, la formule :

$$\begin{aligned} & P^1(y, x, u; F) \\ (III.5) \quad &= \int_{\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_1} 1_F[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y, x, u)] \\ & p^1(v_0, v_1, y, x, u) \mu_0(dv_0) \mu_1(dv_1) \end{aligned}$$

écrite pour tout $F \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{Y}, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$, définit bien une probabilité de transition :

$$P^1 : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

THÉOREME III.2.

La probabilité de transition P^1 , construite au moyen des formules (III.3), (III.4) et (III.5) ci-dessus, constitue une probabilité conditionnelle régulière généralisée par rapport à la variable aléatoire à commande X et relativement à la probabilité de transition P^0 définie par la formule (III.1) (voir définition du paragraphe III du chapitre 1).

DÉMONSTRATION :

On a vu que P^1 est une probabilité de transition. Il reste donc à montrer que, quels que soient $A \in \mathcal{X}, F \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{Y}$ et $u \in \mathcal{U}$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_A[X(\omega, u)] 1_F(\omega) P^0(y; d\omega) \\ &= \int_{\Omega} 1_A[X(\omega, u)] P^1[y, X(\omega, u), u; F] P^0(y; d\omega) \end{aligned}$$

Par définition même de P° , cela revient à montrer que :

$$\begin{aligned} & \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} 1_A [\tilde{X}(v_0, v_1, y, w_1, u)] 1_F [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, w_1] \\ & \quad P^\circ(v_0, v_1, w_1, y) \mu_0(dv_0) \mu_1(dw_1) v_1(dw_1) \\ &= \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} 1_A [\tilde{X}(v_0, v_1, y, w_1, u)] P^1[y, \tilde{X}(v_0, v_1, y, w_1, u), u; F] \\ & \quad P^\circ(v_0, v_1, w_1, y) \mu_0(dv_0) \mu_1(dw_1) v_1(dw_1) \end{aligned}$$

Rappelons que, pour tout $x \in X$, on a par définition même de P^1 :

$$\begin{aligned} & P^1[y, x, u; F] \\ &= \int_{V_0 \times V_1} 1_F[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y, x, u)] \\ & \quad P^1(v_0, v_1, y, x, u) \mu_0(dv_0) \mu_1(dw_1) \end{aligned}$$

On constate alors que l'on peut appliquer pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $u \in \mathcal{U}$ fixés, le théorème II,1 du paragraphe II en y prenant :

- pour variable v le couple de variables (v_0, v_1)
- pour variable w la variable w_1
- pour variable y la variable x
- pour fonction p° la fonction : $p^\circ(\cdot, \cdot, \cdot, y)$
- pour application $\tilde{X}$ l'application : $\tilde{X}(\cdot, \cdot, y, \cdot, u)$
- pour application $\tilde{W}_1$ l'application : $\tilde{W}_1(\cdot, \cdot, y, \cdot, u)$
- pour fonction w^1 la fonction : $w^1(\cdot, \cdot, y, \cdot, u)$
- pour fonction p la fonction :

$$\int_{W_0 \times W_1} p(\cdot, \cdot, w_0, w_1) v_0(dw_0) v_1(dw_1)$$
- pour fonction φ la fonction : $1_F[\cdot, \tilde{W}_0(\cdot, y), \cdot, \cdot]$
- pour fonction ψ la fonction : $P^1(y, \cdot, u; F)$

Dans ces conditions, la formule cherchée n'est autre que la formule (II.1) du théorème II.2.

C.Q.F.D.

III,3. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire ordinaire

La construction utilisée à l'alinéa III.2 dans le cas d'une variable aléatoire à commande peut évidemment s'appliquer au cas particulier des variables aléatoires ordinaires.

Reprenons les notations de l'alinéa III.1. Supposons l'espace mesurable $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ muni d'une mesure σ -finie positive λ_0 , et considérons une application mesurable :

$$\gamma : (V_0, V_1) \times (W_0, W_1) \longrightarrow (\mathcal{V}, \mathcal{Y})$$

que l'on peut regarder comme une variable aléatoire ordinaire particulière définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ puisque :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (V_0, V_1) \times (W_0, W_1) \times (V_1, V_1) \times (W_1, W_1)$$

On fait alors sur γ des hypothèses analogues à celles déjà faites sur X :

1 - pour tout v_0 fixé, l'application partielle : $\gamma (v_0, \cdot)$ de $(W_0, \mathcal{W}_0)$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ est bijective et son application inverse est : $\tilde{W}_0 (v_0, \cdot)$;

2 - pour tout v_0 fixé, la mesure $v_0 \tilde{W}_0 (v_0, \cdot)$ définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ en posant pour $B \in \mathcal{Y}$:

$$v_0 \tilde{W}_0 (v_0, B) = \int_{W_0} 1_B [\gamma (v_0, w_0)] v_0 (dw_0)$$

autrement dit la mesure image de v_0 par $\gamma (v_0, \cdot)$ est absolument continue par rapport à λ_0 et on note sa dérivée de Radon Nicodým $\frac{\partial v_0 \tilde{W}_0}{\partial \lambda_0} (v_0, \cdot)$.

3 - $\tilde{W}_0$ et $\frac{\partial v_0 \tilde{W}_0}{\partial \lambda_0}$ sont mesurables sur $(V_0, \mathcal{V}_0) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

On suppose que la fonction réelle positive mesurable p° définie sur $(V_0, \mathcal{V}_0) \times (V_1, \mathcal{V}_1) \times (W_1, \mathcal{W}_1) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et déjà considérée en III.1 a été construite en posant successivement :

$$(III.6) \quad \varpi^\circ (v_0, v_1, w_1, y) = p [v_0, \tilde{W}_0 (v_0, y), v_1, w_1] \frac{\partial v_0 \tilde{W}_0}{\partial \lambda_0} (v_0, y)$$

puis

$$N^\circ = \left\{ y \in \mathcal{Y} : \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} \varpi^\circ (v_0, v_1, w_1, y) \mu_0 (dv_0) \mu_1 (dv_1) v_1 (dw_1) = 0 \right\}$$

$$I^\circ = \left\{ y \in \mathcal{Y} : \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} \varpi^\circ (v_0, v_1, w_1, y) \mu_0 (dv_0) \mu_1 (dv_1) v_1 (dw_1) = +\infty \right\}$$

et enfin :

$$(III.7) \quad p^\circ (v_0, v_1, w_1, y) = \frac{1_{(N^\circ \cup I^\circ)^c}(y) \varpi^\circ (v_0, v_1, w_1, y)}{\int_{V_0 \times V_1 \times W_1} \varpi^\circ (v_0', v_1', w_1', y) \mu_0 (dv_0') \mu_1 (dv_1') v_1 (dw_1')}$$

$$+ \frac{1_{(N^\circ \cup I^\circ)}(y)}{\int_{W_0} p (v_0, w_0, v_1, w_1) v_0 (dw_0)}$$

THÉOREME III.3.

Si la fonction p° est définie au moyen des relations (III.6) et (III.7) ci-dessus, la probabilité de transition $P^\circ : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$ définie par la formule (III.1), c'est-à-dire en posant pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$P^\circ (y ; F) = \int_{V_0 \times V_1 \times W_1} 1_F [v_0, \tilde{W}_0 (v_0, y), v_1, w_1] p^\circ (v_0, v_1, w_1, y) \mu_0 (dv_0) \mu_1 (dv_1) v_1 (dw_1)$$

est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

DÉMONSTRATION :

On peut considérer ce théorème comme un cas particulier du théorème III.2. Plus simplement on peut vérifier qu'il s'agit d'une conséquence du théorème II.1, appliqué pour tout $F \in \mathcal{F}$ fixé, en prenant :

- pour variable v le triplet (v_0, v_1, w_1)
- pour variable w la variable w_0
- pour variable y la variable y

- pour fonction p^o la fonction p
- pour application $\mathcal{Y}$ l'application $\mathcal{Y}$
- pour application $\mathcal{W}$ l'application $\tilde{\mathcal{W}}_o$
- pour fonction ϖ' la fonction ϖ^o
- pour fonction p la fonction : $\int_{\mathcal{W}_o} p(\cdot, w_o, \cdot, \cdot) \nu(dw_o)$
- pour fonction p' la fonction p^o
- pour fonction φ l'indicatrice 1_F
- pour fonction Ψ la fonction $P^o(\cdot; F)$

C.Q.F.D.

III.4. Construction d'une probabilité conditionnelle régulière par rapport à une variable aléatoire à commande adaptée à une observation

Le théorème III.3 et le théorème III.2 admettent le corollaire suivant :

COROLLAIRE III.4.

Soient $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ la variable aléatoire ordinaire et la variable aléatoire à commande, définies respectivement aux alinéas III.3 et III.1.

Si α est une application mesurable de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, on peut alors définir la variable aléatoire $\bar{X}$ à commande adaptée à l'observation $\mathcal{Y}$ au moyen de la fonction de commande α :

$$\bar{X}(v_o, w_o, v_1, w_1) = X[v_o, w_o, v_1, w_1, \alpha(\mathcal{Y}(v_o, w_o))]$$

Les fonctions mesurables positives p^o et p' étant construites comme indiqué aux alinéas III.3 (formules (III.6) et (III.7)) et III.2 (formules (III.3) et (III.4)), la probabilité de transition :

$$\bar{P}' : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{F})$$

définie en posant, pour tous $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$, $F \in \mathcal{F}$:

$$\bar{P}'(y, x; F) = \int_{\mathcal{W}_o \times \mathcal{W}_1} 1_F[v_o, \tilde{W}_o(v_o, y), v_1, \tilde{W}_1(v_o, v_1, y, x, \alpha(y))] p'[v_o, v_1, y, x, \alpha(y)] \mu_o(dw_o) \mu_1(dw_1)$$

constitue une probabilité conditionnelle régulière par rapport au couple $(\mathcal{Y}, \bar{X})$.

DÉMONSTRATION :

Il suffit de remarquer que, quels que soient $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$\bar{P}'(y, x; F) = P'[y, x, \alpha(y); F]$$

où P' est la probabilité conditionnelle régulière généralisée construite à l'alinéa III.2 (formule (III.5)), et d'appliquer alors le théorème IV.2.1 du chapitre 1.

C.Q.F.D.



IV - CONSTRUCTION D'UNE SUITE RÉGULIÈRE DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ASSOCIÉE A UN PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE, ET APPLICATIONS

Dans ce paragraphe nous généralisons au cas des processus aléatoires à commande les résultats obtenus au paragraphe III pour les variables aléatoires à commande.

IV,1. Principales hypothèses et notations

Soient $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ un espace mesurable, $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, \lambda)$, $(\mathcal{W}, \mathcal{W}, \mu)$, $(\mathcal{W}', \mathcal{W}', \nu)$ trois espaces mesurables munis de mesures positives et σ -finies.

On peut appeler $\mathcal{U}$ espace des commandes, $\mathcal{V}$ espace des observations, $\mathcal{W}$ espace des bruits d'évolution $\mathcal{W}'$ espace des bruits d'observation.

Pour tout entier $j \geq 0$ on désignera par $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ l'espace mesurable produit :

$$(\Omega_j, \mathcal{F}_j) = (\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^{j+1}$$

On suppose que l'on s'est donné une suite $p_0, p_1, \dots, p_j, \dots$ de fonctions réelles positives mesurables, définies sur $(\Omega_0, \mathcal{F}_0), (\Omega_1, \mathcal{F}_1), \dots, (\Omega_j, \mathcal{F}_j), \dots$ et telles que :

1 - quels que soient $k \geq j \geq 0$, quel que soit $\omega_j \in \Omega_j$:

$$p_j(\omega_j) = \int_{(\mathcal{V} \times \mathcal{W})^{k-j}} p_k(\omega_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k) \mu(dv_{j+1}) \nu(dw_{j+1}) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k)$$

2 - quel que soit $j \geq 0$:

$$\int_{(\mathcal{V} \times \mathcal{W})^{j+1}} p_j(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_j, w_j) \mu(dv_0) \nu(dw_0) \mu(dv_1) \nu(dw_1) \dots \mu(dv_j) \nu(dw_j) = 1$$

On peut alors munir $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ d'une probabilité P_k définie en posant pour tout $F_k \in \mathcal{F}_k$:

$$P_k(F_k) = \int_{(\mathcal{V} \times \mathcal{W})^{k+1}} 1_{F_k}(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k) p_k(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k) \mu(dv_0) \nu(dw_0) \mu(dv_1) \nu(dw_1) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k)$$

Il est clair que si $k \geq j \geq 0$, la restriction de P_k à $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ est P_j autrement dit que pour tout $F_j \in \mathcal{F}_j$, on a : $P_k[F_j \times (\mathcal{V} \times \mathcal{W})^{k-j}] = P_j(F_j)$.

On distinguera deux cas :

- 1) le cas de « l'horizon fini » où l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs de l'indice k inférieures ou égales à un entier positif N . Si, comme c'est l'habitude, k représente un temps discret, N est un instant final fini,
- 2) le cas de « l'horizon infini » où l'on s'intéresse à toutes les valeurs positives de l'indice k . Pour l'étude de ce cas on posera :

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^N$$

avec $N = \{1, 2, 3, \dots, k-1, k, \dots\}$, et on supposera qu'il existe sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une probabilité P dont la restriction à $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ soit P_k , quel que soit $k \geq 0$ c'est-à-dire telle que pour tout $F_k \in \mathcal{F}_k$ on ait : $P[F_k \times (\mathcal{V} \times \mathcal{W})^N] = P_k(F_k)$.

Notons que l'existence de la probabilité P est établie si on suppose par exemple que (W, V) et (W, W) sont des espaces métrisables complets de type dénombrable (espaces polonais) munis de leur σ -algèbre de Borel (voir Neveu [23], p. 79, corollaire du parag. III.3).

On considère une suite $\{Y_k\}$ d'applications mesurables Y_k de $(\Omega_k, \mathcal{F}_k) \times (W, U)^k$ dans $(Y, \mathcal{Y})$.

Soit $\{Y'_{k,N}; k=0,1,2,\dots,N\}$ la suite (finie) d'applications mesurables $Y'_{k,N}$ de $(\Omega_N, \mathcal{F}_N) \times (W, U)^k$ dans $(Y, \mathcal{Y})$ définie par :

$$\begin{aligned} Y'_{k,N} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, \dots, v_N, w_N, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = Y_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

Elle constitue un processus aléatoire à commande à horizon fini N , défini sur $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$, à valeurs dans $(Y, \mathcal{Y})$ et d'espace de commandes (W, U) .

De même la suite (infinie) $\{Y_k; k=0,1,2,\dots\}$ d'applications mesurables Y_k de $(\Omega, \mathcal{F}) \times (W, U)^k$ dans $(Y, \mathcal{Y})$ définie par :

$$\begin{aligned} Y_k [(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, v_{k+2}, w_{k+2}, \dots), u_1, u_2, \dots, u_k] \\ = Y_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

constitue un processus aléatoire à commande à horizon infini, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(Y, \mathcal{Y})$ et d'espace de commandes (W, U) .

Selon le cas, on regardera $\{Y_k\}$ comme un processus aléatoire à commande à horizon fini N ou infini en l'identifiant à $\{Y'_{k,N}\}$ ou $\{Y_k\}$.

On fait sur les applications Y_k les hypothèses suivantes :

1 - pour tous $v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k$ et $u_1, u_2, \dots, u_k$ fixés, l'application partielle :

$$Y_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

de (W, W) dans $(Y, \mathcal{Y})$ est bijective, on notera son application inverse :

$$W_k^\bullet (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

2 - pour tous $v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k$ et $u_1, u_2, \dots, u_k$ fixés, la mesure :

$$\nu W_k^\bullet (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k; \cdot; u_1, u_2, \dots, u_k)$$

définie sur $(Y, \mathcal{Y})$ en posant pour $B \in \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \nu W_k^\bullet (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k; B; u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \int_W 1_B [Y_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \nu(dw_k) \end{aligned}$$

autrement dit la mesure image de ν par $Y_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$ est absolument continue par rapport à λ ; on notera sa dérivée de Radon Nicodým :

$$\frac{\partial \nu W_k^\bullet}{\partial \lambda} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

3 - $W_k^\bullet$ et $\partial \nu W_k^\bullet / \partial \lambda$ sont des applications mesurables par rapport à l'ensemble de leur arguments, c'est-à-dire sur l'espace produit :

$$(W \times W, V \otimes W)^k \times (V, V) \times (Y, \mathcal{Y}) \times (W, U)^k$$

On pose : pour tous $v_0, v_1, \dots, v_k, \dots \in \mathbb{V}$, $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots \in \mathbb{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots \in \mathbb{U}$
et $w_0, w_1, \dots, w_k, \dots \in \mathbb{W}$:

$$(IV.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_0(v_0, y_0) = W_0^{\odot}(v_0, y_0) \\ \tilde{W}_1(v_0, v_1, y_0, y_1, u_1) = W_1^{\odot}[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), v_1, y_1, u_1] \\ \dots \dots \dots \\ \tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = W_k^{\odot}[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y_0, y_1, u_1), \dots \\ \dots, v_{k-1}, \tilde{W}_{k-1}(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ v_k, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = Y_k[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y_0, y_1, u_1), \dots \\ \dots, v_{k-1}, \tilde{W}_{k-1}(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k] \end{aligned}$$

Il est clair que :

- 1 - $\tilde{W}_k$ et $\tilde{Y}_k$ sont des applications mesurables par rapport à l'ensemble de leurs arguments (et à valeurs dans $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$)
- 2 - pour tous $v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k$ fixés, l'application partielle :

$$\tilde{Y}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

de $(\mathbb{W}, \mathcal{W})$ dans $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ est bijective et son application inverse est :

$$\tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

- 3 - pour tous $v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k$ fixés, la mesure :

$$\nu \tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}; \cdot; u_1, u_2, \dots, u_k)$$

définie sur $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ comme image de ν par $\tilde{Y}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_k)$
est absolument continue par rapport à λ , et sa dérivée de Radon Nicodým vaut en y_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu \tilde{W}_k}{\partial \lambda}(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \frac{\partial \nu W_k^{\odot}}{\partial \lambda}[v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y_0, y_1, u_1), \dots \\ \dots, v_{k-1}, \tilde{W}_{k-1}(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ v_k, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k] \end{aligned}$$

Cette dérivée est par suite une fonction positive mesurable par rapport à l'ensemble de ses arguments.

IV,2. Construction des probabilités de transition de base

Soit $\{p_k^j ; k=0,1,2,\dots ; j=0,1,\dots,k\}$, la suite de fonctions réelles positives mesurables définies sur les espaces : $(V, V)^{j+1} \times (W \times W, V \otimes W)^{k-j} \times (Y, Y)^{j+1} \times (U, U)^j$ par récurrence sur j de la façon suivante.

On définit d'abord les fonctions positives mesurables w_k^j en posant :

1 - pour $j = 0$:

$$(IV.2) \quad \begin{aligned} w_k^0 & (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \\ &= p_k [v_0, \tilde{w}_0(v_0, y_0), v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k] \frac{\partial v \tilde{w}_0}{\partial \lambda} (v_0, y_0) \end{aligned}$$

2 - pour $1 \leq j \leq k$, supposant p_k^{j-1} connu :

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} w_k^j & (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= p_k^{j-1} [v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, \tilde{w}_j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j), \\ & \quad v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}] \\ & \quad \times \frac{\partial v \tilde{w}_j}{\partial \lambda} (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \end{aligned}$$

($\tilde{w}_0$ et $\tilde{w}_j$ étant définis par les formules (IV.1)).

On considère alors les ensembles :

$$\begin{aligned} N_k^j &= \\ \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \in Y^{j+1} \times U^j : \right. \\ & \left. \int_{V^{j+1} \times (W \times W)^{k-j}} w_k^j(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \right. \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \mu(dv_{j+1}) v(dw_{j+1}) \dots \mu(dv_k) v(dw_k) = 0 \left. \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_k^j &= \\ \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \in Y^{j+1} \times U^j : \right. \\ & \left. \int_{V^{j+1} \times (W \times W)^{k-j}} w_k^j(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \right. \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \mu(dv_{j+1}) v(dw_{j+1}) \dots \mu(dv_k) v(dw_k) = +\infty \left. \right\} \end{aligned}$$

Il est clair que N_k^j et I_k^j sont des ensembles mesurables, appartenant à la σ -algèbre produit $Y^{j+1} \otimes U^j$

On définit enfin P_k^j à partir de ω_k^j par :

$$\begin{aligned}
 & P_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\
 &= \frac{1}{(N_k^j \cup I_k^j)^c} [y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j] \\
 & \times \frac{\omega_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j)}{ \\
 (IV.4) \quad & \int_{W_{x,j+1}^{j+1}(V \times W)^{k-j}} \omega_k^j (v_0', v_1', \dots, v_j', v_{j+1}', w_{j+1}', v_{j+2}', w_{j+2}', \dots, v_k', w_k', y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\
 & \mu(dv_0') \mu(dv_1') \dots \mu(dv_j') \mu(dv_{j+1}') v(dw_{j+1}') \dots \mu(dv_k') v(dw_k') \\
 & + \frac{1}{(N_k^j \cup I_k^j)} [y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j] \\
 & \times \int_{W_{j+1}^{j+1}} P_k(v_0, w_0', v_1, w_1', \dots, v_j, w_j', v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k) v(dw_0') v(dw_1') \dots v(dw_j')
 \end{aligned}$$

Considérons alors les probabilités de transition P_k^j définies pour $0 \leq j \leq k$ en posant, quels que soient $y_0, y_1, \dots, y_j \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$ et $F_k \in \mathcal{F}_k$:

$$\begin{aligned}
 & P_k^j (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j ; F_k) \\
 &= \int_{W_{x,j+1}^{j+1}(V \times W)^{k-j}} 1_{F_k} [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), v_1, \tilde{W}_1(v_0, v_1, y_0, y_1, u_1), \dots, v_j, \tilde{W}_j(v_0, \dots, v_j, y_0, \dots, y_j, u_1, \dots, u_j) \\
 (IV.5) \quad & v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k] \\
 & P_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\
 & \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \mu(dv_{j+1}) v(dw_{j+1}) \dots \mu(dv_k) v(dw_k)
 \end{aligned}$$

Remarquons que, par construction, on a toujours :

$$\int_{W_{x,j+1}^{j+1}(V \times W)^{k-j}} P_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \mu(dv_{j+1}) v(dw_{j+1}) \dots \mu(dv_k) v(dw_k) = 1$$

Dans ces conditions le lemme III.6 et le corollaire III.5 de l'annexe assurent que P_k^j est bien une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ dans $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$.

LEMME IV.2.

Quels que soient $k \geq j \geq 0$ et $v_0, v_1, \dots, v_j \in V$, $(v_{j+1}, w_{j+1}), (v_{j+2}, w_{j+2}), \dots, (v_k, w_k) \in W \times W$, $y_0, y_1, \dots, y_j \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
 & P_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\
 &= \int_{W \times W} P_{k+1}^j (v_0, v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_{k+1}) v(dw_{k+1})
 \end{aligned}$$

Par suite la restriction de P_{k+1}^j à $(\Omega_k \mathcal{F}_k)$ est P_k^j .

DEMONSTRATION :

Montrons le d'abord pour $j=0$. Par construction et d'après les hypothèses faites sur p_k on a, quels que soient $k \geq 0$ et $y_0 \in \mathcal{Y}$: (cf. formule (IV.2))

$$\begin{aligned} & \varpi_k^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \\ &= \int_{W_k \times W} \varpi_{k+1}^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} & \int_{W_k \times (W_k \times W)} \varpi_k^0 (v_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, y_0) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \nu(dw_1) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k) \\ &= \int_{W_k \times (W_k \times W)} \varpi_{k+1}^0 (v_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0) \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \nu(dw_1) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit : $N_k^0 = N_{k+1}^0$ et $I_k^0 = I_{k+1}^0$

Comme d'autre part, d'après les hypothèses faites sur les p_k :

$$\begin{aligned} & \int_W p_k (v_0, w_0', v_1, w_1, \dots, v_k, w_k) \nu(dw_0') \\ &= \int_{W_k \times W_k \times W} p_{k+1} (v_0, w_0', v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}) \nu(dw_0') \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

On a bien finalement : (cf. formule (IV.4))

$$\begin{aligned} & p_k^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \\ &= \int_{W_k \times W} p_{k+1}^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

On peut alors montrer le résultat pour $j \geq 1$ en raisonnant par récurrence. Supposons le vrai pour $j-1$. Par construction on a alors, quel que soient $k \geq j$ et $v_0, v_1, \dots, v_j \in V, (v_{j+1}, w_{j+1}), \dots, (v_k, w_k) \in V \times W, y_0, y_1, \dots, y_j \in \mathcal{Y}, u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$: (cf. formule (IV.3))

$$\begin{aligned} & \varpi_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= \int_{W_k \times W} \varpi_{k+1}^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

On en déduit : $N_k^j = N_{k+1}^j$ et $I_k^j = I_{k+1}^j$ ce qui, compte tenu des hypothèses sur les p_k , permet d'affirmer : (cf. formule (IV.4))

$$\begin{aligned} & p_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= \int_{W_k \times W} p_{k+1}^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

IV.3. Construction d'une suite régulière de probabilités conditionnelles

THEOREME IV.3.1 (horizon fini)

Dans le cas d'un horizon fini $N > 0$, la suite de probabilités de transition $\{P_N^j; j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ définies par les formules (IV.2), (IV.3), (IV.4) et (IV.5) constitue une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N) : (Y_0, Y_1, \dots, Y_N)$. (voir définition du paragraphe III du chapitre 2).

DÉMONSTRATION :

On a déjà vu que P_N^j constitue une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{U})^{j+1}_x(\mathcal{U} \parallel \mathcal{U})^j$ dans $(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$. Il reste donc à montrer que, pour tous $B \in \mathcal{Y}$ et $F \in \mathcal{F}_N$, $j : 1 \leq j \leq N$, $y_0, y_1, \dots, y_{j-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j \in \mathcal{U}$ on a :

$$(IV.6) \quad \int_{\Omega_N} 1_B [Y_0(\omega_N)] 1_F(\omega_N) P_N(d\omega_N) \\ = \int_{\Omega_N} 1_B [Y_0(\omega_N)] P_N^0 [Y_0(\omega_N); F] P_N(d\omega_N)$$

et :

$$(IV.7) \quad \int_{\Omega_N} 1_B [Y_j(\omega_N, u_1, u_2, \dots, u_j)] 1_F(\omega_N) \\ P_N^{j-1}(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega_N) \\ = \int_{\Omega_N} 1_B [Y_j(\omega_N, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ P_N^j [y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, Y_j(\omega_N, u_1, u_2, \dots, u_j), u_1, u_2, \dots, u_j; F] \\ P_N^{j-1}(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega_N)$$

La première égalité signifie simplement que P_N^0 est une probabilité conditionnelle régulière sur $(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$ par rapport à la variable aléatoire Y_0 . Elle est donc une conséquence du théorème III.3 du parag. III à condition d'y remplacer :

- la variable v_1 par le N-uple $(v_1, v_2, \dots, v_N)$
- la variable w_1 par le N-uple $(w_1, w_2, \dots, w_N)$
- l'application γ par l'application Y_0 .

Quant à la seconde égalité, elle s'écrit, par définition de P_N^{j-1} (cf. formule IV.5) :

$$\int_{\mathcal{W}_N^j(v_N, w_N)^{N-j+1}} 1_B [\tilde{Y}_j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, w_j, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ 1_{F_N} [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), \dots, v_{j-1}, \tilde{W}_{j-1}(v_0, \dots, v_{j-1}, y_0, \dots, y_{j-1}, u_1, \dots, u_{j-1}), \\ v_j, w_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_N, w_N] \\ P_N^{j-1}(v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, w_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_N, w_N, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \\ \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_{j-1}) \mu(dv_j) \nu(dw_j) \dots \mu(dv_N) \nu(dw_N)$$

$$= \int_{W_{j+1}^j (W_0, W_j)^{N-j+1}} 1_B [\tilde{Y}_j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, w_j, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ P_N^j [y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \tilde{Y}_j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, w_j, u_1, u_2, \dots, u_j), \\ u_1, u_2, \dots, u_j ; F_N] \\ P_N^{j-1} (v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, w_j, v_{j+1}, w_{j+1}, \dots, v_N, w_N, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \\ \mu (dv_0) \mu (dv_1) \dots \mu (dv_{j-1}) \mu (dv_j) v(dw_j) \dots \mu (dv_N) v(dw_N)$$

Cette égalité peut être regardée comme une conséquence du théorème II.1 du paragraphe II, appliqué pour tout $(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathcal{Y}^j \times \mathcal{U}^j$ fixé, en y prenant :

- pour variable v l'ensemble des variables $(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_N, w_N)$
- pour variable w la variable w_j
- pour variable y la variable y_j
- pour fonction p^0 la fonction : $P_N^{j-1} (\cdot, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1})$
- pour application Y l'application : $\tilde{Y}_j (\cdot, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_j)$
- pour application W l'application : $\tilde{W}_j (\cdot, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_j)$
- pour fonction w' la fonction : $w_N^j (\cdot, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_j)$
- pour fonction p la fonction :

$$\int_{W_{j+1}^j} P_N (\cdot, w_0, \cdot, w_1, \dots, \cdot, w_j, \cdot) v(dw_0) v(dw_1) \dots v(dw_j)$$

- pour fonction p^1 la fonction : $P_N^j (\cdot, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_j)$
- pour fonction φ la fonction :

$$1_{F_N} [\cdot, \tilde{W}_0(\cdot, y_0), \cdot, \tilde{W}_1(\cdot, y_0, y_1, u_1), \dots, \cdot, \tilde{W}_{j-1}(\cdot, y_0, \dots, y_{j-1}, u_1, \dots, u_{j-1}), \cdot]$$

- pour fonction Ψ la fonction :

$$P_N^j (y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \cdot, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j ; F_N)$$

C.Q.F.D.



On peut énoncer un résultat analogue à celui du théorème précédent dans le cas de l'horizon infini, à cette différence près que l'on doit faire une hypothèse supplémentaire, d'ailleurs peu restrictive, sur les espaces $(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ et $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ de façon à assurer que les probabilités de transition P_k^j définies sur $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ont bien un prolongement sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

THÉOREME IV.3.2 (horizon infini)

Dans le cas de l'horizon infini, s'il existe une suite $\{P^j ; j=0, 1, 2, \dots\}$, de probabilités de transition P^j de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que, quel que soient $k \gg j \gg 0$ la restriction de P^k à $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ soit la probabilité de transition P_k^j définie par les formules (IV.2), (IV.3), (IV.4) et (IV.5), alors la suite $\{P^j ; j=0, 1, 2, \dots\}$ constitue une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P) : (Y_0, Y_1, \dots, Y_j, Y_{j+1}, \dots)$ (voir définition du paragraphe III du chapitre 2).

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les espaces $(V, \mathcal{V})$ et $(W, \mathcal{W})$ soient des espaces métrisables complets de type dénombrable (espaces polonais) munis de leur σ -algèbre de Borel.

DEMONSTRATION :

On conviendra d'identifier et de noter indifféremment F_k :

- 1 - l'élément F_k de la σ -algèbre $\mathcal{F}_k$
- 2 - l'élément $F_k \times (W \times W)^{j-k}$ de la σ -algèbre $\mathcal{F}_j$ ($j \geq k$), c'est-à-dire le cylindre de $\mathcal{F}_j$ de base F_k .
- 3 - l'élément $F_k \times (W \times W)^{NI}$ (où $NI = \{1, 2, 3, \dots\}$) de la σ -algèbre $\mathcal{F}$ c'est-à-dire le cylindre de $\mathcal{F}$ de base F_k .

Avec cette convention, $\mathcal{F}_k$ désignera donc aussi bien la σ -algèbre $\mathcal{F}_k$ proprement dite que les sous σ -algèbres de $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}$ constitués des cylindres de base dans $\mathcal{F}_k$. Par suite, on peut considérer $\mathcal{F}$ comme la σ -algèbre engendrée par l'algèbre $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$

Montrons alors la première partie du théorème. Soit $\mathcal{S}$ la classe des $F \in \mathcal{F}$ tels que, quels que soient $j \geq 0$, $y_0, y_1, \dots, y_{j-1} \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$ et $B \in \mathcal{Y}$ on ait les deux égalités :

$$(IV.8) \quad \int_{\Omega} 1_B [\gamma_0(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) \\ = \int_{\Omega} 1_B [\gamma_0(\omega)] P^0[\gamma_0(\omega); F] P(d\omega)$$

et :

$$(IV.9) \quad \int_{\Omega} 1_B [\gamma_j(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j)] 1_F(\omega) P^{j-1}(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega) \\ = \int_{\Omega} 1_B [\gamma_j(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ P^j[y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, \gamma_j(\omega, u_1, u_2, \dots, u_j), u_1, u_2, \dots, u_j; F] \\ P^{j-1}(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}; d\omega)$$

La classe $\mathcal{S}$ est, comme on peut s'en assurer facilement, une classe σ -additive. D'autre part $\mathcal{S}$ contient l'algèbre $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$. Soit en effet $F \in \mathcal{F}_k$ ($k \geq 0$ quelconque); posons $N = \max(k, j)$ et appliquons le théorème IV.3.1 en rappelant que par hypothèse les restrictions de P^j , P^{j-1} et P à $(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$ sont respectivement P_N^j , P_N^{j-1} et P_N : on obtient précisément les relations (IV.8) et (IV.9) qui ne sont autres que les relations (IV.6) et (IV.7).

Par suite, $\mathcal{S}$ contient la σ -algèbre engendrée par $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$ c'est-à-dire $\mathcal{F}$. (Annexe, lemme II,1).

Montrons maintenant la seconde partie du théorème. Supposons d'abord j et $y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j$ fixés. Les probabilités: $\{P_k^j(y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j; \cdot); k \geq j\}$ constituent, d'après le lemme IV.2, une famille compatible de probabilités sur les espaces $(\Omega_k, \mathcal{F}_k) = (V \times W, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^{k+1}$ qui, moyennant les hypothèses supplémentaires sur $(V, \mathcal{V})$ et $(W, \mathcal{W})$, admet un prolongement sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (cf. Neveu[[23], paragraphe III.3, p. 78 et 79, théorème et corollaire). Soit :

$$P^j(y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j; \cdot)$$

ce prolongement. Comme, quels que soient $k \geq 0$, $j \geq 0$, $y_0, y_1, \dots, y_j \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_j \in \mathcal{U}$ et $F_k \in \mathcal{F}_k$:

$$P^j(y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j; F_k) = P_N^j(y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j; F_k)$$

où $N = \max(k, j)$, la fonction réelle positive: $P^j(\cdot; F)$ est mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ pour tout $F \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$ et par suite pour tout $F \in \mathcal{F}$.

(Annexe, lemme III.1) P^j est donc bien une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{j+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^j$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ qui prolonge P^j_k .

C.Q.F.D.

IV.4. Construction d'une probabilité conditionnelle universelle pour une variable aléatoire à commandes

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable quelconque. Les notations et définitions demeurant celles des alinéas IV.1 et IV.2, soit $\{X_k; k=0, 1, 2, \dots\}$ une suite d'applications mesurables : X_k de $(\Omega_k, \mathcal{F}_k) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Comme on l'a déjà fait pour les γ_k , on identifiera, dans le cas d'un horizon fini N , pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$, X_k et $X'_{k,N}$, application mesurable de $(\Omega_N, \mathcal{F}_N) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, définie par :

$$\begin{aligned} X'_{k,N} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, \dots, v_N, w_N, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = X_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

et dans le cas de l'horizon infini, pour tout $k \geq 0$, X_k et X'_k , mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, définie par :

$$\begin{aligned} X'_k [(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, v_{k+1}, w_{k+1}, v_{k+2}, w_{k+2}, \dots), u_1, u_2, \dots, u_k] \\ = X_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

On peut ainsi considérer $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_N)$ comme un processus aléatoire à commande à horizon N défini sur $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ ou $(X_0, X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots)$ comme un processus aléatoire à commande à horizon infini, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Le théorème IV.3.1 admet alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE IV.4

Les fonctions mesurables positives P^k_{k+1} étant construites pour $k=0, 1, 2, \dots$ comme indiqué à l'alinéa IV.2 (formules (IV.2), (IV.3), (IV.4)) soit Q^k la probabilité de transition :

$$Q^k : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k+1} \longrightarrow \mathcal{X} (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

définie en posant pour $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$ et $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} Q^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; A) \\ = \int_{\mathcal{W}^{k+1} \times (\mathcal{V} \times \mathcal{W})} 1_A [X_{k+1} (v_0, \tilde{w}_0(v_0, y_0), \dots, v_k, \tilde{w}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \\ v_{k+1}, w_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ P^k_{k+1} (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

Alors Q^k constitue pour la variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} , une probabilité conditionnelle universelle par rapport au processus d'observation $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ défini à l'alinéa IV.1 (selon la définition du paragraphe V du chapitre 2).

DEMONSTRATION :

Il suffit de remarquer que, quels que soient $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{X}$:

$$Q^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1} ; A)$$

$$= \int_{\Omega_{k+1}} 1_A [X_{k+1} (\omega_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})]$$

$$P_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; d\omega_{k+1})$$

où P_{k+1}^k est la probabilité de transition construite à l'alinéa IV.2 (formule (IV.5)) et d'appliquer alors le théorème IV.1 du chapitre 2 (voir aussi exemple 3- de l'alinéa V.2. du chapitre 2).



V - CAS DES BRUITS SANS MÉMOIRE (OU « BLANCS »)

Les notations et définitions étant toujours celles du paragraphe IV, on appelle *processus de bruit* le processus aléatoire $(V_0, W_0), (V_1, W_1), \dots, (V_k, W_k), \dots$ admettant pour espace de probabilité canonique $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ ou $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivant que l'horizon est N ou est infini, c'est-à-dire défini en posant :

$$\begin{aligned} V_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, \dots) &= v_k \\ W_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, \dots) &= w_k \end{aligned}$$

On dit que le processus de bruit est *sans mémoire*, si, quels que soient les entiers positifs k et $j \neq k$ (V_k, W_k) est indépendant de (V_j, W_j) ou, de façon équivalente, si quel que soit $k \geq 0$ la densité de probabilité p_k peut se mettre sous la forme :

(V.1)
$$p_k (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k) = \prod_{j=0}^k \ell_j (v_j, w_j)$$
 où les ℓ_j sont des fonctions réelles positives mesurables définies sur $(W \times W, \mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$ et telles que :

$$\int_{W \times W} \ell_j (v, w) \mu(dv) \nu(dw) = 1$$

Dans ce cas, le calcul des densités de probabilité conditionnelles p_k^j permettant de construire une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_j)$ se simplifie car on a le résultat suivant :

LEMME V.1

Dans le cas où le processus de bruit : $(V_0, W_0), (V_1, W_1), \dots, (V_k, W_k), \dots$ est sans mémoire (c'est-à-dire où la densité de probabilité p_k se met sous la forme (V.1)), les fonctions p_k^j définies pour $k \geq j \geq 0$ aux alinéas IV.1 et IV.2 (formules (IV.2), (IV.3), (IV.4)) se calculent à partir de p_j^j au moyen de la formule :

(V.2)
$$\begin{aligned} p_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ = p_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i (v_i, w_i) \end{aligned}$$

et p_j^j se calcule par récurrence au moyen de la formule :

(V.3)
$$\begin{aligned} p_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ = 1_{(N^j \cup I^j)^c} (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ \times \frac{\omega_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j)}{\int_{W^{j+1}} \omega_j^j (v_0', v_1', \dots, v_j', y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_0') \dots \mu(dv_j')} \\ + 1_{(N^j \cup I^j)} (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \times \prod_{i=0}^j \ell_i (v_i, w_i) \nu(dw) \end{aligned}$$

où :

1 - pour $j = 0$:

$$(V.4) \quad \varpi_0^j (v_0, y_0) = \rho_0 [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0)] \frac{\partial v \tilde{W}_0}{\partial \lambda} (v_0, y_0)$$

2 - pour $j \geq 1$:

$$(V.5) \quad \begin{aligned} & \varpi_j^j (v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j) \\ &= p_{j-1}^{j-1} (v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \\ & \times \rho_j [v_j, \tilde{W}_j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ & \times \frac{\partial v \tilde{W}_j}{\partial \lambda} (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \end{aligned}$$

($\tilde{W}_0$ et $\tilde{W}_j$ étant définis par (IV.1))

et où les ensembles N^j et I^j sont définis par :

$$N^j = \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{Y}^{j+1} \times \mathbb{U}^j : \int_{\mathbb{W}^{j+1}} \varpi_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_0) \dots \mu(dv_j) = 0 \right\}$$

et :

$$I^j = \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \in \mathbb{Y}^{j+1} \times \mathbb{U}^j : \int_{\mathbb{W}^{j+1}} \varpi_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_0) \dots \mu(dv_j) = +\infty \right\}$$

DEMONSTRATION :

Il suffit de montrer la relation (V.2). En effet, la relation (V.3) n'est autre que la relation (IV.4) du paragraphe IV écrite pour $k=j$ et en tenant compte de (V.1), la relation (V.4) n'est autre que la relation (IV.2) écrite pour $k=0$ et la relation (V.5) n'est autre que la relation (IV.3) écrite pour $k=j$ et en tenant compte de (V.2)

Montrons d'abord la relation (V.2) pour $j=0$. D'après (IV.2) et (V.1), pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \varpi_k^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \\ &= \rho_0 [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0)] \times \prod_{i=1}^k \rho_i (v_i, w_i) \times \frac{\partial v \tilde{W}_0}{\partial \lambda} (v_0, y_0) \\ &= \varpi_0^0 (v_0, y_0) \times \prod_{i=1}^k \rho_i (v_i, w_i) \end{aligned}$$

D'où en particulier :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{W}_X(\mathbb{W}_X, \mathbb{W}_X)^k} \varpi_k^0 (v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \nu(dw_1) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k) \\ &= \int_{\mathbb{W}} \varpi_0^0 (v_0, y_0) \mu(dv_0) \end{aligned}$$

et par suite : $N_k^o = N^o$ et $I_k^o = I^o$

Par ailleurs, d'après (V.1) :

$$\begin{aligned} & \int_W p_k(v_0, w_0', v_1, w_1, \dots, v_k, w_k) \nu(dw_0') \\ &= \int_W p_0(v_0, w_0') \nu(dw_0') \times \prod_{i=1}^k \ell_i(v_i, w_i) \end{aligned}$$

La formule (IV.4) s'écrit alors, pour $j=0$:

$$\begin{aligned} & p_k^o(v_0, v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_k, w_k, y_0) \\ &= 1_{(N^o \cup I^o)^c}(y_0) \times \frac{\varpi^o(v_0, y_0)}{\int_W \varpi^o(v_0', y_0) \mu(dv_0')} \times \prod_{i=1}^k \ell_i(v_i, w_i) \\ &+ 1_{(N^o \cup I^o)}(y_0) \int_W p_0(v_0, w_0') \nu(dw_0') \times \prod_{i=1}^k \ell_i(v_i, w_i) \\ &= p_0^o(v_0, y_0) \times \prod_{i=1}^k \ell_i(v_i, w_i) \end{aligned}$$

La relation (V.2), que l'on vient de montrer pour $j=0$, se montre pour $j \leq k$ quelconque en raisonnant par récurrence sur j . Supposons la vérifiée, en effet, pour $j-1$. Alors, d'après la formule (IV.3) :

$$\begin{aligned} & \varpi_k^j(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= p_{j-1}^{j-1}(v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \\ &\quad \times \ell_j[v_j, \tilde{W}_j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j)] \\ &\quad \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \times \frac{\partial \nu \tilde{W}_j}{\partial \lambda}(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= \varpi_j^j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \end{aligned}$$

D'où en particulier :

$$\begin{aligned} & \int_{W^{j+1} \times (W_k \times W)^{k-j}} \varpi_k^j(v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &\quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \mu(dv_{j+1}) \nu(dw_{j+1}) \\ &\quad \mu(dv_{j+2}) \nu(dw_{j+2}) \dots \mu(dv_k) \nu(dw_k) \\ &= \int_{W^{j+1}} \varpi_j^j(v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &\quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_j) \end{aligned}$$

et par suite : $N_k^j = N^j$ et $I_k^j = I^j$

Par ailleurs, d'après (V.1) :

$$\begin{aligned} & \int_{W_{j+1}} P_k (v_0, w_0', v_1, w_1', \dots, v_j, w_j', v_{j+1}, w_{j+1}', \dots, v_k, w_k) \nu(dw_0') \nu(dw_1') \dots \nu(dw_j') \\ &= \int_{W_{j+1}} P_j (v_0, w_0', v_1, w_1', \dots, v_j, w_j') \nu(dw_0') \nu(dw_1') \dots \nu(dw_j') \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \end{aligned}$$

La formule (IV.4) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & P_k^j (v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, w_{j+1}, v_{j+2}, w_{j+2}, \dots, v_k, w_k, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ &= 1_{(N^j \cup I^j)^c} (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ & \times \frac{\omega_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j)}{\int_{V_{j+1}} \omega_j^j (v_0', v_1', \dots, v_j', y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \mu(dv_0') \dots \mu(dv_j')} \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \\ & + 1_{(N^j \cup I^j)} (y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \\ & \times \int_{W_{j+1}} P_j (v_0, w_0', v_1, w_1', \dots, v_j, w_j') \nu(dw_0') \nu(dw_1') \dots \nu(dw_j') \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \\ & = P_j^j (v_0, v_1, \dots, v_j, y_0, y_1, \dots, y_j, u_1, u_2, \dots, u_j) \times \prod_{i=j+1}^k \ell_i(v_i, w_i) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.



VI - CAS D'UN SYSTÈME DÉFINI PAR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION ET UNE ÉQUATION D'OBSERVATION

Dans ce paragraphe, nous examinons ce que deviennent les hypothèses et les résultats des paragraphes IV et V dans le cas où le processus aléatoire à commande $\{Y_k\}$ est défini par une équation d'observation à partir d'un autre processus aléatoire à commande $\{X_k\}$ lui-même défini par une équation d'évolution (voir chapitre 2, paragraphe I : exemples de processus aléatoires à commande). Il sera intéressant en particulier de retrouver certaines formules de **Striebel** [26] dans le cas de bruits « blancs ».

VI.1. Cas général

Les notations restant celles définies en IV.1 et IV.4, soient $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ une suite d'applications mesurables :

$$f_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{V}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

et f_0 une application mesurable :

$$f_0 : (\mathcal{V}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

Soit $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ le processus aléatoire à commande, défini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ ou $(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$ suivant que l'horizon est infini ou N , à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, construit en posant :

$$\begin{aligned} X_k & (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &= f_k [X_{k-1} (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, v_k] \end{aligned}$$

si $k \geq 1$, avec :

$$X_0 (v_0) = f_0 (v_0)$$

Le processus ainsi obtenu est un cas particulier simplifié du processus $\{X_k\}$ considéré en IV.4, puisque l'application X_k ne dépend pas ici des variables $w_0, w_1, \dots, w_k$.

Soient $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ une suite d'applications mesurables :

$$h_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \times (\mathcal{W}, \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

et h_0 une application mesurable :

$$h_0 : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \times (\mathcal{W}, \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$$

Supposons que le processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots)$, défini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ ou $(\Omega_N, \mathcal{F}_N)$ à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, déjà considéré en IV.1, est construit en posant :

$$\begin{aligned} Y_k & (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_k, w_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &= h_k [X_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \\ & \quad Y_{k-1} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, w_k] \end{aligned}$$

si $k \geq 1$, avec :

$$Y_0 (v_0, w_0) = h_0 [X_0 (v_0), w_0]$$

Faisons sur les applications h_k les hypothèses supplémentaires suivantes :

1 - les applications partielles :

$$w_k \rightsquigarrow y_k = h_k (x_k, y_{k-1}, u_k, w_k)$$

$$\text{et } w_0 \rightsquigarrow y_0 = h_0 (x_0, w_0)$$

admettent des applications inverses, respectivement :

$$y_k \xrightarrow{\quad} w_k = W_k^* (x_k, y_{k-1}, u_k, y_k)$$

$$y_0 \xrightarrow{\quad} w_0 = W_0^* (x_0, y_0)$$

quels que soient $x_k \in \mathbb{X}$, $y_{k-1} \in \mathbb{Y}$, $u_k \in \mathbb{U}$

2. les mesures νW_k^* définies sur $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ en posant pour $B \in \mathcal{Y}$:

$$\nu W_k^* (x_k, y_{k-1}, u_k; B) = \int_{W_k} 1_B [h_k(x_k, y_{k-1}, u_k, w_k)] \nu(dw_k)$$

pour $k \geq 1$ et :

$$\nu W_0^* (x_0; B) = \int_{W_0} 1_B [h_0(x_0, w_0)] \nu(dw_0)$$

c'est-à-dire les images de ν par $h_k(x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot)$ et $h_0(x_0, \cdot)$ sont, quels que soient x_k, y_{k-1} et u_k , absolument continues par rapport à λ et admettent donc des dérivées de Radon Nicodým notées :

$$\frac{\partial \nu W_k^*}{\partial \lambda} (x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \nu W_0^*}{\partial \lambda} (x_0, \cdot)$$

3. les applications W_k^* et $\partial \nu W_k^* / \partial \lambda$ sont mesurables par rapport à l'ensemble de leurs arguments.

Il est clair alors que les hypothèses 1) 2) et 3) faites en IV.1 sur les applications γ_k sont satisfaites. Il suffit en effet de prendre $W_k^{\oplus}$ défini par :

$$\begin{aligned} W_k^{\oplus} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = W_k^* [X_k(v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \\ \gamma_{k-1}(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, y_k] \end{aligned}$$

pour $k \geq 1$ et :

$$W_0^{\oplus} (v_0, y_0) = W_0^* [X_0(v_0), y_0]$$

Les dérivées de Radon Nicodým s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu W_k^{\oplus}}{\partial \lambda} (v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, v_k, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \frac{\partial \nu W_k^*}{\partial \lambda} [X_k(v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \gamma_{k-1}(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-1}, w_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, y_k] \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial \nu W_0^{\oplus}}{\partial \lambda} (v_0, y_0) = \frac{\partial \nu W_0^*}{\partial \lambda} [X_0(v_0), y_0]$$

Remarquons que, d'une façon générale, on a par définition de $W_{k-1}^{\oplus}$:

$$\gamma_{k-1}[v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-2}, w_{k-2}, v_{k-1}]$$

$$W_{k-1}^{\oplus}(v_0, w_0, v_1, w_1, \dots, v_{k-2}, w_{k-2}, v_{k-1}, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_k, y_k] = \gamma_{k-1}$$

Par suite, si $\tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k, \dots$ sont construits à partir de $W_0^*, W_1^*, \dots, W_k^*, \dots$ comme en IV.1, (par les formules (IV.1)) on a :

$$\gamma_{k-1} [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), \dots, v_{k-2}, \tilde{W}_{k-2}(v_0, v_1, \dots, v_{k-2}, y_0, y_1, \dots, y_{k-2}, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}), v_{k-1}, \tilde{W}_{k-1}(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}] = y_{k-1}$$

On a donc, dans le cas particulier envisagé ici :

$$(VI.1) \quad \begin{aligned} & \tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &= W_k^* [X_k(v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k), y_{k-1}, u_k, y_k] \end{aligned}$$

$$(VI.2) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \nu \tilde{W}_k}{\partial \lambda}(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &= \frac{\partial \nu W_k^*}{\partial \lambda} [X_k(v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k), y_{k-1}, u_k, y_k] \end{aligned}$$

Rappelons que pour $k=0$, on a :

$$\begin{aligned} & \tilde{W}_0(v_0, y_0) = W_0^* [X(v_0), y_0] \\ \text{et :} & \frac{\partial \nu \tilde{W}_0}{\partial \lambda}(v_0, y_0) = \frac{\partial \nu W_0^*}{\partial \lambda} [X(v_0), y_0] \end{aligned}$$

REMARQUE VI.1.1.

Supposons que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ soient deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et λ et ν les mesures de Lebesgue à n dimensions. D'après ce que l'on a vu en I.2 (exemple 2), si l'application :

$$w_k \longmapsto h_k(x_k, y_{k-1}, u_k, w_k)$$

est bijective et continûment différentiable ainsi que son inverse W_k^* , alors la mesure $\nu W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k; \cdot)$ image sur $\mathcal{V}$ de la mesure de Lebesgue ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ et sa dérivée de Radon Nicodým vaut :

$$\frac{\partial \nu W_k^*}{\partial \lambda}(x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot) = \left| \det \left\{ \frac{\partial W_k^*}{\partial y_k}(x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot) \right\} \right|$$

VI.2. Cas des bruits sans mémoire

La possibilité de définir les processus aléatoire à commande $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ au moyen d'une équation d'évolution et d'une équation d'observation est particulièrement intéressante dans le cas où le « processus de bruit » (V_k, W_k) est sans mémoire (voir paragraphe V). Pour simplifier, nous supposons de plus que V_k et W_k sont indépendants, c'est-à-dire que la densité de probabilité du couple (V_k, W_k) par rapport à $\mu \otimes \nu$ soit ℓ_k , se décompose en :

$$\ell_k(v_k, w_k) = \ell_k^1(v_k) \ell_k^2(w_k) \quad \text{où :} \quad \int_{\mathcal{V}} \ell_k^1(v) \mu(dv) = \int_{\mathcal{W}} \ell_k^2(w) \nu(dw) = 1$$

Dans ce cas, on peut en effet calculer une probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} ou pour Y_{k+1} relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, directement au moyen d'une équation de récurrence, sans passer explicitement par la suite régulière de probabilités conditionnelles P_{k+1}^k

construites en IV.2, et par suite sans faire intervenir à chaque instant k le $(k+1)$ uplet $(v_0, w_0), (v_1, w_1), \dots, (v_k, w_k)$ d'un maniement pratique malaisé.

THEOREME VI.2.1

Soient Q_k , Q_k^* et Q_{k+1}^* , pour $k=0, 1, \dots$, les probabilités de transition :

$$\begin{aligned} - \quad Q_k &: (U, u)^k \longrightarrow \Sigma (X, x) \\ - \quad Q_k^* &: (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^k \longrightarrow \Sigma (X, x) \\ - \quad Q_{k+1}^* &: (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^{k+1} \longrightarrow \Sigma (X, x) \end{aligned}$$

définies par les équations de récurrence suivantes (écrites pour tous $y_0, y_1, \dots, y_k \in Y, u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in U, A \in \mathcal{X}$)

1 - Q_k est définie en posant, pour $k=0$:

$$Q_0(A) = \int_V 1_A [f_0(v_0)] \ell_0^*(v_0) \mu(dv_0)$$

et pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} &Q_k(u_1, u_2, \dots, u_k; A) \\ (VI.3) \quad &= \int_{X \times V} 1_A [f_k(x_{k-1}, u_k, v_k)] Q_{k-1}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}; dx_{k-1}) \\ &\quad \ell_k^*(v_k) \mu(dv_k) \end{aligned}$$

2 - Q_k^* est définie en posant pour $k=0$:

$$\begin{aligned} &Q_0^*(y_0; A) \\ &\left\{ \begin{aligned} &= \frac{\int_X 1_A(x_0) \ell_0^*[W_0^*(x_0, y_0)] \frac{\partial v W_0^*}{\partial \lambda}(x_0, y_0) Q_0(dx_0)}{\int_X \ell_0^*[W_0^*(x_0, y_0)] \frac{\partial v W_0^*}{\partial \lambda}(x_0, y_0) Q_0(dx_0)} \\ &\quad \text{si le dénominateur n'est pas nul ni infini} \\ &= Q_0(A) \quad \text{sinon} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

et pour $k \geq 1$, supposant Q_{k-1}^* connu :

$$\begin{aligned} &Q_k^*(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k; A) \\ (VI.4) \quad &\left\{ \begin{aligned} &= \frac{\int_X 1_A(x_k) \ell_k^*[W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k)] \frac{\partial v W_k^*}{\partial \lambda}(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k) Q_{k-1}^*(y_0, \dots, y_{k-1}, u_1, \dots, u_{k-1}; dx_k)}{\int_X \ell_k^*[W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k)] \frac{\partial v W_k^*}{\partial \lambda}(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k) Q_{k-1}^*(y_0, \dots, y_{k-1}, u_1, \dots, u_{k-1}; dx_k)} \\ &\quad \text{si le dénominateur n'est pas nul ni infini} \\ &= Q_k(u_1, u_2, \dots, u_k; A) \quad \text{sinon} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

• 3 - enfin, Q_{k+1}^k est définie, pour tout $k \geq 0$, à partir de Q_k^k en posant :

$$(VI.5) \quad \begin{aligned} & Q_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; A) \\ &= \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{V}} 1_A [f_{k+1} (x_k, u_{k+1}, v_{k+1})] \\ & \quad Q_k^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; dx_k) \ell_{k+1}^d (v_{k+1}) \mu (dv_{k+1}) \end{aligned}$$

Alors la probabilité de transition Q_{k+1}^k est une probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

DEMONSTRATION :

On voit d'abord sans peine que :

$$\begin{aligned} & Q_k (u_1, u_2, \dots, u_k ; A) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+1}} 1_A [X_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \ell_0^d (v_0) \ell_1^d (v_1) \dots \ell_k^d (v_k) \\ & \quad \mu (dv_0) \mu (dv_1) \dots \mu (dv_k) \end{aligned}$$

En effet, c'est vrai par définition pour $k=0$. D'autre part, si c'est vrai pour $k-1$, ça l'est encore pour k .

Soient w_j^i et p_k^i , pour $k=0, 1, 2, \dots$ et $j=0, 1, 2, \dots, k$, les fonctions calculées par les formules (V.2), (V.3), (V.4) et (V.5) du lemme V.1 (applicables puisque le processus de bruit (V_k, W_k) est sans mémoire).

Supposons que pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$(VI.6) \quad \begin{aligned} & Q_k^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k ; A) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+1}} 1_A [X_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ & \quad p_k^k (v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \mu (dv_0) \mu (dv_1) \dots \mu (dv_k) \end{aligned}$$

Alors, par définition, (formule(VI.5)) :

$$\begin{aligned} & Q_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} ; A) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A [f_{k+1} (X_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k), u_{k+1}, v_{k+1})] \\ & \quad p_k^k (v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \ell_{k+1}^d (v_{k+1}) \mu (dv_0) \mu (dv_1) \dots \mu (dv_k) \mu (dv_{k+1}) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A [X_{k+1} (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad p_k^k (v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \ell_{k+1}^d (v_{k+1}) \mu (dv_0) \mu (dv_1) \dots \mu (dv_k) \mu (dv_{k+1}) \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{X}} 1_A(x_{k+1}) \ell_{k+1}^2 [W_{k+1}^*(x_{k+1}, y_k, u_{k+1}, y_{k+1})] \\ & \quad \frac{\partial v W_{k+1}^*}{\partial \lambda}(x_{k+1}, y_k, u_{k+1}, y_{k+1}) \\ & \quad Q_{k+1}^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}; dx_{k+1}) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad \ell_{k+1}^2 [W_{k+1}^*(X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}), y_k, u_{k+1}, y_{k+1})] \\ & \quad \frac{\partial v W_{k+1}^*}{\partial \lambda}[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}), y_k, u_{k+1}, y_{k+1}] \\ & \quad p_k^k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \ell_{k+1}^1(v_{k+1}) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les formules (VI.1) et (VI.2)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad \ell_{k+1}^1(v_{k+1}) \ell_{k+1}^2[\tilde{W}_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1})] \\ & \quad \frac{\partial v \tilde{W}_{k+1}}{\partial \lambda}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \\ & \quad p_k^k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

ou encore, par définition de ω_{k+1}^{k+1} (formule (V.5))

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1})] \\ & \quad \omega_{k+1}^{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

En comparant, d'une part la formule définissant Q_{k+1}^{k+1} à partir de Q_{k+1}^k (formule (VI.4)) d'autre part la formule définissant p_{k+1}^{k+1} à partir de ω_{k+1}^{k+1} (formule (V.3) du lemme V.1), il devient clair que :

$$\begin{aligned} & Q_{k+1}^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; A) \\ &= \int_{\mathbb{V}^{k+2}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1})] \\ & \quad p_{k+1}^{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

Pour que la relation (VI.6) soit vraie quel que soit $k \geq 0$, il suffit donc qu'elle le soit pour $k = 0$. Or il en est bien ainsi car :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{x}} 1_A(\mathbf{x}_0) \ell_0^2[W_0^*(\mathbf{x}_0, y_0)] \frac{\partial v W_0^*}{\partial \lambda}(\mathbf{x}_0, y_0) Q_0(d\mathbf{x}_0) \\ &= \int_{\mathcal{W}} 1_A[f_0(v_0)] \ell_0^2[W_0^*(f_0(v_0), y_0)] \frac{\partial v W_0^*}{\partial \lambda}[f_0(v_0), y_0] \\ & \quad \ell_0^1(v_0) \mu(dv_0) \\ &= \int_{\mathcal{W}} 1_A[X_0(v_0)] \ell_0^2[\tilde{W}_0(v_0, y_0)] \frac{\partial v \tilde{W}_0}{\partial \lambda}(v_0, y_0) \ell_0^1(v_0) \mu(dv_0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par définition de w_0° (formule V.4) :

$$= \int_{\mathcal{W}} 1_A[X_0(v_0)] w_0^\circ(v_0, y_0) \mu(dv_0)$$

et par suite, par définition de p_0° et de Q_0° , on a pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$Q_0^\circ(y_0; A) = \int_{\mathcal{W}} 1_A[X_0(v_0)] p_0^\circ(v_0, y_0) \mu(dv_0)$$

Au cours des calculs précédents on a également montré que, quel que soit $k \geq 0$ (puisque (VI.6) est vraie quel que soit $k \geq 0$) :

$$\begin{aligned} & Q_{k+1}^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; A) \\ (VI.7) \quad &= \int_{\mathcal{W}^{k+2}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad p_k^k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \ell_{k+1}^1(v_{k+1}) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \end{aligned}$$

ou, puisque, par hypothèse, $\int_{\mathcal{W}} \ell_{k+1}^2(w_{k+1}) v(dw_{k+1}) = 1$:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{W}^{k+2} \times \mathcal{W}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad p_k^k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \ell_{k+1}^1(v_{k+1}) \\ & \quad \ell_{k+1}^2(w_{k+1}) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) v(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

ou encore, d'après la formule (V.2) du lemme V.1

$$\begin{aligned} & Q_{k+1}^k(y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; A) \\ &= \int_{\mathcal{W}^{k+2} \times \mathcal{W}} 1_A[X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})] \\ & \quad p_{k+1}^k(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & \quad \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) v(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

Le corollaire IV.4 nous assure alors que Q_{k+1}^k constitue bien, pour la variable aléatoire à $k+1$ commandes X_{k+1} une probabilité conditionnelle universelle relativement au processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

COROLLAIRE VI.2.2.

C.Q.F.D.

Soit, pour $k=0, 1, 2, \dots$, R_{k+1}^k la probabilité de transition :

$$R_{k+1}^k : (\mathcal{Y}, y)^{k+1} \times (\mathcal{U}, u)^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{Y}, y)$$

définie à partir de la probabilité Q_{k+1}^k construite au théorème précédent en posant (pour tous $B \in \mathcal{Y}$, $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \mathcal{U}$):

$$\begin{aligned} R_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; B) \\ = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{W}} 1_B [h_{k+1}(x_{k+1}, y_k, u_{k+1}, w_{k+1})] \\ Q_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}; dx_{k+1}) \\ \ell_{k+1}^2(w_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

R_{k+1}^k est une probabilité conditionnelle universelle pour Y_{k+1} relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

DEMONSTRATION :

La formule (VI.7) établie dans la démonstration du théorème précédent entraîne :

$$\begin{aligned} R_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}; B) \\ = \int_{\mathcal{V}^{k+2} \times \mathcal{W}} 1_B [h_{k+1}(X_{k+1}(v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}), y_k, u_{k+1}, w_{k+1})] \\ p_k^k (v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \ell_k^1(v_{k+1}) \ell_k^2(w_{k+1}) \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

Si on rappelle que, pour tout $y_k \in \mathcal{Y}$:

$$y_k = Y_k [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), \dots, v_k, \tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k), u_1, u_2, \dots, u_k]$$

il est clair que la relation précédente s'écrit encore, par définition même de Y_{k+1} , d'une part et de p_{k+1}^k d'autre part :

$$\begin{aligned} R_{k+1}^k (y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}; B) \\ = \int_{\mathcal{V}^{k+2} \times \mathcal{W}} 1_B \{ Y_{k+1} [v_0, \tilde{W}_0(v_0, y_0), \dots, v_k, \tilde{W}_k(v_0, v_1, \dots, v_k, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k), v_{k+1}, w_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}] \} \\ p_{k+1}^k (v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, w_{k+1}, y_0, y_1, \dots, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \mu(dv_0) \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \mu(dv_{k+1}) \nu(dw_{k+1}) \end{aligned}$$

ce qui, en vertu du corollaire IV.4, prouve que $\mathcal{R}_{k+1}^k$ est bien une probabilité conditionnelle universelle pour γ_{k+1} relativement à $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$. C.Q.F.D.

REMARQUE VI.2.3.

Plaçons nous dans le cas particulier où :

$$- \quad \mathbb{X} = \mathbb{V} = \mathbb{R}^m$$

$$- \quad \mathbb{Y} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^n$$

et où λ, μ, ν sont les mesures de Lebesgue.

Supposons, que dans la formule (VI.4) du théorème VI.2.1, le dénominateur n'est jamais nul ni infini. Alors la formule (VI.3) devient inutile et les formules (VI.4) et (VI.5) ne sont autres que la formule (2.20), p. 581 obtenue par **Striebel** [26], écrite ici sous une forme plus « opérationnelle » grâce aux hypothèses plus précises faites sur l'application h_k et les lois de probabilité des bruits V_k et W_k .



Chapitre 5

APPLICATIONS A L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE

Au cours de ce chapitre, il nous arrivera souvent de faire figurer simultanément dans une égalité, ou une inégalité, d'une part des nombres ou des fonctions réelles, et d'autre part des espérances conditionnelles. Pour que cela ait un sens, nous supposons, par convention, que, dans ce cas, l'espérance conditionnelle désigne, non pas la classe d'équivalence de variables aléatoires, mais un représentant, choisi de façon arbitraire dans cette classe.

Par ailleurs, nous pouvons être amenés à considérer des variables aléatoires qui ne sont définies qu'en dehors d'un ensemble négligeable. Nous les supposons alors toujours prolongées de façon arbitraire sur ce négligeable.

I - OPTIMISATION ORDINAIRE

1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment les notions de probabilité et d'espérance conditionnelles universelles, dont nous avons donné la définition et montré l'existence au chapitre 2, permettent un exposé rigoureux de la méthode de la *programmation dynamique stochastique*.

Cette méthode d'optimisation a déjà été proposée par de nombreux auteurs (voir **Bellman** [3], **Dreyfus** [10], chap. 8 ; **Aoki** [1], chap. 2 ; **Boudarel, Delmas, Guichet** [7], chap. 5, en temps discret - **Dreyfus** [10], chap. 7 ; **Mortensen** [22], en temps continu). Mais les problèmes théoriques qu'elle soulève ne sont que rarement abordés et incomplètement résolus. En temps discret notamment, se pose celui de la justification mathématique des manipulations de probabilités « conditionnelles » où la commande apparaît tantôt comme un paramètre, tantôt comme une variable aléatoire, et que nous interpréterons comme des probabilités conditionnelles universelles (voir **Striebel** [26] pour une première approche de ce problème).

Certains auteurs éliminent la difficulté en adoptant un autre modèle où ces probabilités « conditionnelles à commande » sont considérées comme des données et utilisées pour la construction des processus aléatoires à commande bouclée, qui sont alors définis sur leur espace probabilisable canonique muni d'une probabilité différente pour chaque bouclage. Mais ces théories n'envisagent à notre connaissance que le cas d'un processus d'état parfaitement observé, c'est-à-dire confondu avec le processus d'observation (voir **Howard**, [16], **Pallu de la Barrière** [24], **Lanery** [20] dans le cas discret markovien ; **Blackwell** [5] et **Strauch** [25] dans le cas markovien discret ou non ; **Hinderer** [15] dans le cas général ; voir aussi le commentaire du chapitre 2, parag. VII).

La note de **Valadier** [27] constitue une des rares réflexions sur les fondements mathématiques de la programmation dynamique stochastique dans le cas d'un processus d'état imparfaitement observé, c'est-à-dire distinct du processus d'observation (avec, d'ailleurs, un point de vue un peu différent du nôtre). Mais cette étude se borne à un système décrit par une équation d'évolution et une équation d'observation à bruits indépendants sans mémoire.

Les conditions suffisantes d'optimalité en horizon fini que nous énonçons dans ce chapitre sont montrées dans un cadre d'une généralité tout à fait inhabituelle, sans hypothèse d'observation parfaite, ni de bruits sans mémoire. Par contre, l'étude des conditions nécessaires d'optimalité, des conditions d'existence d'une politique optimale ou du cas de l'horizon infini, semble nécessiter des hypothèses plus fines, et n'a pas été abordée ici. (Pour des résultats relatifs à ces questions, dans le cas de l'observation parfaite, on pourra consulter les publications déjà citées de **Pallu de la Barrière** [24], **Lanery** [20], **Blackwell** [5], **Strauch** [25] et **Hinderer** [15]).

1.2. Politiques - Optimalité d'une politique (en horizon fini)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ deux espaces mesurables, appelés respectivement espace d'observation et espace de commande.

Etant donné un entier positif N , on considère :

1) un processus aléatoire à commande d'horizon N : $(Y_0, Y_1, \dots, Y_N, \dots, Y_N)$, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et appelé *processus d'observation*.

2) un processus aléatoire à commande d'horizon $N : (\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N, \dots, \mathcal{L}_\infty)$, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles positives, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et appelé *processus de coût*.

En pratique, le processus de coût sera souvent construit de la façon suivante : étant donné un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$ d'horizon N , défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans un espace mesurable, dit espace d'état, $(X, \mathcal{X})$, et à commandes dans $(U, \mathcal{U})$, et qu'on appelle *processus d'état*, on choisit une suite : $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots, d_N$ de $N+1$ applications mesurables :

$$d_k: (\mathbb{Y}, y)^{R+1} \times (\mathbb{X}, x)^{R+1} \times (\mathbb{U}, u)^R \rightarrow \mathbb{R}^+$$

et on pose :

$$(I.1) \quad \begin{aligned} & L_R(\omega, u_1, u_2, \dots, u_R) \\ &= d_R [\gamma_0(\omega), \gamma_1(\omega, u_1), \dots, \gamma_R(\omega, u_1, u_2, \dots, u_R), \\ & \quad X_0(\omega), X_1(\omega, u_1), \dots, X_R(\omega, u_1, u_2, \dots, u_R), u_1, u_2, \dots, u_R] \end{aligned}$$

pour tous $\omega \in \Omega$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in L$

Bien entendu, le processus d'état et le processus d'observation peuvent être confondus (dans ce cas, les automaticiens disent que « l'état est parfaitement observé »).

On appelle *tactique* à l'instant R une application mesurable :

$$f_R: (V, y)^R \times (W, u)^{R-1} \rightarrow (W, u)$$

et politique (ou stratégie) d'horizon N , une suite : $(j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_N)$ de N tactiques aux instants : $1, 2, \dots, k, \dots, N$.

A une politique d'horizon N donnée, $(j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_N)$, on peut associer un *bouclage* d'horizon N , $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_N)$, en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(y_0) = \gamma_1(y_0) \\ \alpha_2(y_0, y_1) = \gamma_2[y_0, y_1, \alpha_1(y_0)] \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_N(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = \gamma_N[y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, \alpha_1(y_0), \dots, \alpha_{N-1}(y_0, y_1, \dots, y_{N-2})] \end{array} \right.$$

pour tous $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in Y$

Réciproquement, tout bouclage $:(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ d'horizon N peut être évidemment considéré comme une politique d'horizon N particulière.

On prendra garde toutefois que l'équivalence entre les deux notions n'est que *globale*.

Ainsi, on peut associer à deux politiques $(j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_N)$ et $(\tilde{j}_1, \tilde{j}_2, \dots, \tilde{j}_k, \dots, \tilde{j}_N)$ respectivement deux bouclages $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_N)$ et $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k, \dots, \tilde{\alpha}_N)$; mais le bouclage associé à la politique « mixte » $(j_1, j_2, \dots, j_k, \tilde{j}_{k+1}, \tilde{j}_{k+2}, \dots, \tilde{j}_N)$ n'est pas en général $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \tilde{\alpha}_{k+1}, \tilde{\alpha}_{k+2}, \dots, \tilde{\alpha}_N)$.

On précisera souvent la politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ à laquelle est associé le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ en notant ce dernier :

$$\left\{ \alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)} \right\}$$

(dans la construction de la fonction de commande à l'instant $k : \alpha_k$, seule intervient en effet la sous-politique d'horizon $k : \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$).

On notera $\{\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{Y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}, \dots, \bar{Y}_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$ le processus aléatoire ordinaire dit à commande bouclée, associé au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_N)$ au moyen du bouclage : $\{\alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$

Pour condenser l'écriture, on désignera par

$$\bar{Y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \triangleq \sigma \left\{ \bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{Y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \right\}$$

la sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par les $k+1$ variables aléatoires : $\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{Y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}$
 $\mathcal{Y}_{-1}$ sera éventuellement la σ -algèbre « grossière » : $\mathcal{Y}_{-1} \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$

On notera de même $\{\bar{L}_0, \bar{L}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}, \dots, \bar{L}_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$ le processus aléatoire (réel positif) à commande adaptée au processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_N)$, qu'on associe au processus aléatoire à commande : $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, L_N)$ au moyen du bouclage : $\{\alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$.

Rappelons que les processus $\{\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{Y}_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$ et $\{\bar{L}_0, \bar{L}_1^{(\gamma_1)}, \dots, \bar{L}_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$ sont construits par récurrence en posant : (cf. chapitre 2, paragraphe II)

$$\begin{cases} \bar{Y}_0(\omega) = Y_0(\omega) & \text{et pour } k = 1, 2, \dots, N : \\ \bar{Y}_k^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}(\omega) = Y_k[\omega, \alpha_1^{(\gamma_1)}(\bar{Y}_0(\omega)), \dots, \alpha_k^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}(\bar{Y}_0(\omega), \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})}(\omega))] \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \bar{L}_0(\omega) = L_0(\omega) & \text{et pour } k = 1, 2, \dots, N : \\ \bar{L}_k^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}(\omega) = L_k[\omega, \alpha_1^{(\gamma_1)}(Y_0(\omega)), \dots, \alpha_k^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}(\bar{Y}_0(\omega), \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})}(\omega))] \end{cases}$$

quel que soit $\omega \in \Omega$.

Etant donné la définition du bouclage $\{\alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)}\}$ on peut donner de cette construction l'interprétation pratique suivante : à chaque instant k on connaît, non seulement les k valeurs antérieures du processus d'observation $\{Y_j\}$ mais aussi les $k-1$ valeurs antérieures de la commande ; c'est en fonction de ces données qu'est choisie la k -ième commande (au moyen de l'application γ_k).

A toute politique d'horizon $N : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$, on associe un nombre réel positif $J_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ appelé *indice de coût* (ou *coût total*) et défini par l'espérance mathématique :

$$J_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{k=0}^N \bar{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \right\}$$

On dira qu'une politique $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_N)$ est *meilleure* que la politique $(y_1, y_2 \dots y_N)$ si :

$$J_0(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_N) \leq J_0(y_1, y_2 \dots y_N)$$

et qu'elle est *optimale* si elle est meilleure que toute autre politique.

REMARQUE -

Au lieu de chercher à *minimiser* l'indice de coût, on peut chercher à le *maximiser* (on préfère alors l'appeler indice de gain). Les définitions correspondantes sont analogues, et la transposition des résultats qui suivent immédiate.

1.3. Coût partiel associé à une politique - Politiques partielles

A une politique $(y_1, y_2 \dots y_k, \dots y_N)$ donnée on associe, à chaque instant $k = 1, 2, \dots, N$, une variable aléatoire réelle positive :

$$J_k(y_1, y_2 \dots y_k, \dots y_N)(\cdot)$$

choisie (de façon arbitraire) dans la classe d'équivalence de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ \sum_{j=k}^N \overline{L}_j^{(y_1, y_2 \dots y_j)} / \overline{y}_{k-1}^{(y_1, y_2 \dots y_{k-1})} \right\}$$

et qu'on appellera *coût partiel* à l'instant k .

On appelle *politique partielle* à l'instant k (et d'horizon N) une suite $(y_k, y_{k+1} \dots, y_N)$ de $N-k+1$ tactiques aux instants : $k, k+1 \dots N$. Une politique partielle à l'instant k et d'horizon N $(y_k, y_{k+1} \dots, y_N)$, jointe à une politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2 \dots, y_{k-1})$, forme une politique d'horizon N : $(y_1, y_2 \dots y_{k-1}, y_k, y_{k+1} \dots y_N)$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions :

LEMME 1.3.1

Soient $(y_1, y_2 \dots y_k, y_{k+1} \dots y_N)$ une politique et $(y_1, y_2 \dots y_k, \tilde{y}_{k+1} \dots \tilde{y}_N)$ la politique modifiée obtenue en remplaçant la politique partielle : $(y_{k+1}, y_{k+2} \dots y_N)$ par une autre politique partielle : $(\tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2} \dots \tilde{y}_N)$. Si on a l'inégalité presque sure entre coûts partiels à l'instant $k+1$:

$$(I.2) \quad J_{k+1}(y_1, y_2 \dots y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2} \dots \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_{k+1}(y_1, y_2 \dots y_k, y_{k+1}, y_{k+2} \dots y_N)$$

alors on a l'inégalité presque sure entre coûts partiels à l'instant k :

$$(I.3) \quad J_k(y_1, y_2 \dots y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2} \dots \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_k(y_1, y_2 \dots y_k, y_{k+1}, y_{k+2} \dots y_N)$$

DÉMONSTRATION :

Par définition même de J_{k+1} on a, pour toute politique partielle à l'instant $k+1 : (\overset{\circ}{j}_{k+1}, \overset{\circ}{j}_{k+2} \dots \overset{\circ}{j}_N)$

$$E \left\{ \sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j (j_1, j_2 \dots j_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_j) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

$$\stackrel{p.s.}{=} E \left\{ J_{k+1} (j_1, j_2 \dots j_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_N) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

puisque la σ -algèbre engendrée par $\overline{y}_0, \overline{y}_1(j_1), \dots, \overline{y}_{k-1}(j_1, j_2 \dots j_{k-1})$ est évidemment contenue dans la σ -algèbre engendrée par $\overline{y}_0, \overline{y}_1(j_1), \dots, \overline{y}_{k-1}(j_1, j_2 \dots j_{k-1}), \overline{y}_k(j_1, j_2 \dots j_k)$.

Par suite :

$$J_k (j_1, j_2, \dots j_k, \overset{\circ}{j}_{k+1}, \overset{\circ}{j}_{k+2} \dots \overset{\circ}{j}_N)$$

$$\stackrel{p.s.}{=} E \left\{ \overline{L}_k (j_1, j_2 \dots j_{k-1}, j_k) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

$$+ E \left\{ J_{k+1} (j_1, j_2 \dots j_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_N) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

Or, en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\overline{y}_0, \overline{y}_1(j_1) \dots \overline{y}_{k-1}(j_1, j_2 \dots j_{k-1})$ des deux membres de l'inégalité (I.2), on obtient :

$$E \left\{ J_{k+1} (j_1, j_2 \dots j_k, \tilde{j}_{k+1} \dots \tilde{j}_N) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

$$\stackrel{p.s.}{\leq} E \left\{ J_{k+1} (j_1, j_2 \dots j_k, j_{k+1} \dots j_N) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

On en déduit l'inégalité (I.3) en ajoutant à chaque membre :

$$E \left\{ \overline{L}_k (j_1, j_2, \dots j_{k-1}, j_k) / \overline{y}_{k-1} (j_1, j_2 \dots j_{k-1}) \right\}$$

C.Q.F.D.

Nous dirons qu'une politique partielle à l'instant $k : (\tilde{j}_k, \tilde{j}_{k+1} \dots \tilde{j}_N)$ est meilleure que la politique partielle à l'instant $k : (\overset{\circ}{j}_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_N)$ si, quelle que soit la politique d'horizon $k-1 : (j_1, j_2 \dots j_{k-1})$ le coût partiel à l'instant k associé à la politique $(j_1, j_2 \dots j_{k-1}, \tilde{j}_k, \tilde{j}_{k+1} \dots \tilde{j}_N)$ est presque sûrement inférieur ou égal à celui associé à la politique $(j_1, j_2 \dots j_{k-1}, \overset{\circ}{j}_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_N)$:

$$J_k (j_1, j_2 \dots j_{k-1}, \tilde{j}_k, \tilde{j}_{k+1} \dots \tilde{j}_N) \stackrel{p.s.}{\leq} J_k (j_1, j_2 \dots j_{k-1}, \overset{\circ}{j}_k, \overset{\circ}{j}_{k+1} \dots \overset{\circ}{j}_N)$$

La politique partielle à l'instant $k : (\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_N)$ est dite *optimale* si elle est meilleure que n'importe quelle autre politique partielle à l'instant $k : (y_k, y_{k+1}, \dots, y_N)$.

Enfin une politique d'horizon $N : (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N)$ est dite *optimale à chaque instant* si pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$ la politique partielle à l'instant $k : (\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_N)$ est optimale. Une politique $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N)$ optimale à chaque instant est donc en particulier une politique partielle optimale à l'instant 1, et par suite, d'après le lemme I,3.1, appliqué pour $k = 0$, est en particulier une politique *optimale*.

Le théorème suivant énonce une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une politique partielle à l'instant k , dont les $N-k$ dernières tactiques constituent une politique partielle à l'instant $k+1$ optimale. Il nous permettra d'envisager à l'alinéa I.4 la construction par récurrence rétrograde d'une politique optimale à chaque instant.

THEOREME I,3.2.

Soient $(\tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)$ une politique partielle optimale à l'instant $k+1$ et $\tilde{y}_k$ une tactique à l'instant k .

Pour que la politique partielle à l'instant $k : (\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)$ soit optimale, il faut et il suffit qu'elle soit meilleure que la politique partielle $(y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)$ quelle que soit la tactique y_k choisie à l'instant k .

DÉMONSTRATION :

La condition étant par définition nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Par hypothèse, quelle que soit la politique $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N)$, on a les deux inégalités suivantes :

$$(I.4) \quad J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N)$$

$$(I.5) \quad J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)$$

D'après le lemme I,3.1, l'inégalité (I.4) implique :

$$J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N)$$

En comparant avec l'inégalité (I.5) on voit alors que, quelle que soit la politique d'horizon $k-1 : (y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ et la politique partielle à l'instant $k : (y_k, y_{k+1}, \dots, y_N)$, on a :

$$J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_N) \leq_{p.s.} J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_N)$$

c'est-à-dire que $(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_N)$ est optimale.

C.Q.F.D.

1.4. Programmation dynamique stochastique

Le lemme suivant indique comment l'équation de la programmation dynamique permet de calculer par récurrence des coûts partiels aux instants : $N, N-1, \dots, k, \dots, 1$ et le coût total.

LEMME 1.4.1

Supposons que :

1) Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ la variable aléatoire réelle positive à $k+1$ commandes L_{k+1} admette, relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, une espérance conditionnelle universelle :

$$M_{k+1} : (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^{k+1} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

(voir définition au paragraphe V du chapitre 2) ; on désigne par M_0 l'espérance de L_0 .

2) Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, la variable aléatoire à $k+1$ commandes Y_{k+1} admette relativement au processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, une probabilité conditionnelle universelle :

$$R^k : (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^{k+1} \rightarrow (Y, y)$$

(voir définition du paragraphe V du chapitre 2) ; on désigne par R^{-1} la probabilité $P.(Y_0)^{-1}$ image de P par Y_0 .

Etant donné une politique d'horizon $N : (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N)$, soient $C_0, C_1, \dots, C_k, \dots, C_N$ les fonctions réelles positives mesurables :

$$C_k : (Y, y)^k \times (U, u)^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

(qu'on peut appeler « fonctions de Bellman ») construits par récurrence rétrograde au moyen de l'équation « de la programmation dynamique » :

$$(I.6) \quad \begin{aligned} C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) &= M_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &+ \int_Y C_{k+1}[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ &\quad R^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k) \end{aligned}$$

pour $k = N, N-1, \dots, 1, 0$ et $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in Y, u_1, u_2, \dots, u_k \in U$, et avec $C_{N+1} = 0$

Alors, à tout instant $k = 0, 1, 2, \dots, N$, et, si $k \geq 1$, quelle que soit la politique d'horizon $k : (y_1, y_2, \dots, y_k)$, si on désigne par $\alpha : \{\alpha_1(y_1), \alpha_2(y_1, y_2), \dots, \alpha_k(y_1, y_2, \dots, y_k)\}$ le bouclage associé à $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, on a l'égalité presque sûre :

$$\begin{aligned}
 (I.7) \quad C_k & \left[\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \right. \\
 & \left. \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}) \right] \\
 & \stackrel{\text{p.s.}}{=} J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

D'après la définition même de l'espérance conditionnelle universelle on a, pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et quelle que soit la politique $(y_1, y_2, \dots, y_k)$:

$$\begin{aligned}
 (I.8) \quad M_k & \left[\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \right. \\
 & \left. \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}) \right] \\
 & \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \bar{L}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)} / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\}
 \end{aligned}$$

En particulier la relation (I.7) est donc au moins vraie pour $k = N$.

Posons pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{C}_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\
 & = C_k [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]
 \end{aligned}$$

Faisons alors l'hypothèse que la relation (I.7) est vérifiée à l'instant $k+1$ ($0 \leq k \leq N-1$) pour toute politique d'horizon $k+1$: $(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$. En prenant $y_{k+1} = \tilde{y}_{k+1}$, on obtient en particulier, pour toute politique d'horizon k , $(y_1, y_2, \dots, y_k)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{k+1} & \left[\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \bar{y}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}, \right. \\
 & \left. \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}) \right] \\
 & \stackrel{\text{p.s.}}{=} J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N)
 \end{aligned}$$

Posons par ailleurs :

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \int_{\mathcal{Y}} \tilde{C}_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ R^{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k ; dy_k) \end{aligned}$$

pour tous $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$

On a, d'après le théorème V,3.2 du chapitre 2, pour toute politique d'horizon $k : (y_1, y_2, \dots, y_k)$

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1} [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \tilde{C}_{k+1} [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \bar{y}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}, \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \right. \\ \left. \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \\ (I.9) \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \end{aligned}$$

Rappelons, comme on l'a déjà montré en détail à propos du lemme I,3.1, que :

$$\begin{aligned} J_k (y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \\ \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \bar{L}_k (y_1, y_2, \dots, y_k) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \\ + E \left\{ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \end{aligned}$$

Or, par définition de Ψ_{k+1} , l'équation (I.6) s'écrit :

$$\begin{aligned} C_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = M_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) + \Psi_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{aligned}$$

pour tous $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$

D'après l'égalité (I.8) d'une part et l'égalité (I.9) de l'autre, on a donc bien

$$\begin{aligned} C_k [\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(Y_1)}, \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})} \\ \alpha_1^{(Y_1)}(\bar{Y}_0), \dots, \alpha_k^{(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)}(\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(Y_1)}, \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})})] \\ \stackrel{\text{p.3.}}{=} J_k (Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \tilde{Y}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+2}, \dots, \tilde{Y}_N) \end{aligned}$$

pour toute politique d'horizon $k : (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$, ce qui n'est autre que la relation (I.7) écrite à l'instant k .

En raisonnant ainsi de proche en proche pour $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$, on obtient le résultat souhaité.

C.Q.F.D.

REMARQUE I.4.2.

Supposons, comme c'est souvent le cas en pratique, que le processus de coût $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, L_N)$ est construit à partir d'un processus d'état $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_N)$, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à commandes dans $(U, \mathcal{U})$, à valeurs dans $(X, \mathcal{X})$ au moyen d'une suite $d_0, d_1, \dots, d_k, \dots, d_N$ d'applications mesurables :

$$d_k : (Y, \mathcal{Y})^k \times (X, \mathcal{X}) \times (U, \mathcal{U})^k \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

en posant, pour $\omega \in \Omega$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$

$$\begin{aligned} L_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) \\ = d_k [Y_0(\omega), Y_1(\omega, u_1), \dots, Y_{k-1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k), u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k] \end{aligned}$$

(il s'agit là d'un cas particulier de la construction du processus de coût utilisant un processus d'état envisagé en I.2: voir formule (I.1)).

Supposons qu'à chaque instant $k = 1, 2, \dots, N$, X_k admette relativement au processus d'observation $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ une probabilité conditionnelle universelle :

$$Q^{k-1} : (Y, \mathcal{Y})^k \times (U, \mathcal{U})^k \longrightarrow (X, \mathcal{X})$$

Soit Q^{-1} la probabilité $P.(X_0)^{-1}$ image de P par X_0 .

Alors, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$, la fonction réelle positive M_k définie sur $(Y, \mathcal{Y})^k \times (U, \mathcal{U})^k$ en posant :

$$\begin{aligned} (I.10) \quad M_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \int_X d_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ Q^{k-1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dx_k) \end{aligned}$$

constitue, d'après le théorème V.3.2. du chapitre 2, une espérance conditionnelle universelle pour L_k relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$.



Dans le théorème suivant, on traduit, au moyen de l'inéquation de la programmation dynamique, le critère d'optimalité du théorème I,3.2.

THEOREME I,4.3.

Supposons vérifiées les hypothèses 1 et 2 du lemme I,4.1.

Soient $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_N)$ une politique et $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_N$ les fonctions réelles positives mesurables définies, comme au lemme I,4.1, par l'équation de la programmation dynamique :

$$(1.6) \quad C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) = M_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) + \int_{\mathcal{Y}} C_{k+1}[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] R^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k)$$

avec $C_{N+1} = 0$

Si, quel que soient $k = 1, 2, \dots, N$, $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in \mathcal{U}$ la tactique $\tilde{y}_k$ vérifie l'inéquation de la programmation dynamique :

$$(1.11) \quad C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \leq C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k)$$

alors la politique $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_N)$ est optimale à chaque instant.

DÉMONSTRATION :

Quels que soient $k = 1, 2, \dots, N$ et la politique d'horizon $k : (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)$, on a, d'après l'inégalité (I.11) :

$$\begin{aligned} & C_k[\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ & \quad \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-2}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-2})}), \\ & \quad \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \tilde{y}_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ & \leq C_k[\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ & \quad \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-2}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-2})}), \\ & \quad \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après le lemme I,4.1 :

$$J_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \\ \leq_{p.s.} J_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$$

Autrement dit, quelle que soit la tactique γ_k , la politique partielle $(\tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ est meilleure que $(\gamma_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$. En appliquant le théorème I,3.2 successivement aux instants $N, N-1, \dots, k, \dots, 2, 1$, on en déduit que $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ est optimale à chaque instant.

C.Q.F.D.

REMARQUE I,4.4.

Pour tenter d'obtenir une politique optimale $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ on procèdera donc pratiquement de la façon suivante : supposant connue à l'instant k la politique partielle $(\tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ et les fonctions de Bellman associées $C_N, C_{N-1}, \dots, C_k$ étant alors construites au moyen de l'équation (I.6), on cherche une tactique $\tilde{\gamma}_k$ satisfaisant à l'inégalité (I.11) ; puis on fait de même à l'instant $k-1$, et ainsi de suite depuis $k=N$ jusqu'à $k=1$.

Dans le cas général, l'existence et la mesurabilité d'une fonction $\tilde{\gamma}_k$ satisfaisant (I.11) n'est évidemment nullement prouvée.

REMARQUE I,4.5.

On pourra comparer les relations (I.6) et (I.11) du théorème I,4.3. et (I.10) de la remarque I,4.2, respectivement aux relations (21), (23) et (22) données, de façon tout à fait formelle, par Aoki [1], page 31.



II - OPTIMISATION A DEUX JOUEURS

II,1. Jeux séquentiels (en horizon fini) - Politiques de « poursuite » et d' « évvasion »

Dans ce paragraphe on se propose d'étendre les résultats du paragraphe I à certains problèmes de jeux.

On considère, définis exactement comme en I,2 :

- 1) un processus d'observation $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_N)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$,
- 2) un processus de coût $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, L_N)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs réelles positives, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$.

Mais on suppose ici que l'espace de commande $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ est un espace produit :

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1) \times (\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2)$$

Tout élément $u \in \mathcal{U}$ est donc un couple : $u = (u^1, u^2)$ constitué d'un élément $u^1 \in \mathcal{U}_1$, appelé *commande de poursuite* et d'un élément $u^2 \in \mathcal{U}_2$, appelé *commande d'évasion*.

On appelle *tactique de poursuite* à l'instant k une application mesurable :

$$\gamma_k^1 : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k-1} \longrightarrow (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1)$$

et *tactique d'évasion* à l'instant k , une application mesurable :

$$\gamma_k^2 : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k-1} \longrightarrow (\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2)$$

Une tactique est le couple d'une tactique de poursuite et d'une tactique d'évasion, c'est-à-dire, conformément à la définition du paragraphe I, une application mesurable :

$$\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2) : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k-1} \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

On appelle *politique de poursuite*, *politique d'évasion*, ou *politique d'horizon N* , une suite respectivement de N tactiques de poursuite, N tactiques d'évasion, N tactiques, aux instants $1, 2, 3, \dots, N$.

Comme on l'a déjà exposé en détail en I,2 à une politique donnée $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ on peut associer un bouclage $\left\{ \alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)} \right\}$ en posant successivement pour $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \alpha_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \\ &= \gamma_k \left[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, \alpha_1^{(\gamma_1)}(y_0), \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}(y_0, y_1), \dots, \alpha_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})}(y_0, y_1, \dots, y_{k-2}) \right] \end{aligned}$$

On notera encore $\left\{ \bar{\gamma}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \right\}$ et $\left\{ \bar{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \right\}$ les processus aléatoires obtenus respectivement par bouclage et adaptation à $Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}$ à partir des processus aléatoires à commande $\{Y_k\}$ et $\{L_k\}$ au moyen du bouclage $\left\{ \alpha_1^{(\gamma_1)}, \alpha_2^{(\gamma_1, \gamma_2)}, \dots, \alpha_N^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)} \right\}$.

Comme on l'a déjà fait au paragraphe I, on associe à chaque politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ l'indice de coût :

$$J_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{k=0}^N \bar{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \right\}$$

On suppose que la politique de poursuite et la politique d'évasion sont choisies par deux « joueurs » distincts, appelés respectivement *poursuivant* et *évadé* et cherchant le premier à minimiser l'indice de coût, le second à le maximiser. Etant donné la forme générale retenue pour les tactiques de poursuite et d'évasion, le poursuivant et l'évadé disposent, à chaque instant k , de la même information, à savoir toutes les valeurs antérieures d'une *observation commune* et toutes les valeurs antérieures des *commandes choisies par l'un et par l'autre*. Cette hypothèse est fondamentale : le cas où chaque joueur dispose d'une observation différente et ignore les commandes antérieures de l'adversaire serait beaucoup plus compliqué et n'a pas été envisagé ici, malgré tout son intérêt pratique.

Chaque joueur étant sensé ignorer la tactique que va choisir l'adversaire, on définit l'optimalité de la façon suivante :

On dit qu'une politique de poursuite : $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_2^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est *meilleure* que la politique de poursuite : $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ si, quelle que soit la politique d'évasion : $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$, il existe une politique d'évasion : $(\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ telle que :

$$\begin{aligned} & J_o [(\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq J_o [(\gamma_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

ce qui implique, en désignant par $\mathcal{S}_o^2$ l'ensemble des politiques d'évasion :

$$\begin{aligned} & \sup_{(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2) \in \mathcal{S}_o^2} J_o [(\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq \sup_{(\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2) \in \mathcal{S}_o^2} J_o [(\gamma_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

On dit qu'une politique de poursuite : $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_2^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est *optimale* si elle est meilleure que toute autre politique de poursuite, ce qui implique, en désignant par $\mathcal{S}_o^1$ l'ensemble des politiques de poursuite :

$$\begin{aligned} & \sup_{(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2) \in \mathcal{S}_o^2} J_o [(\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & = \min_{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1) \in \mathcal{S}_o^1} \left\{ \sup_{(\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2) \in \mathcal{S}_o^2} J_o [(\gamma_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \right\} \end{aligned}$$

Le poursuivant cherche donc à minimiser le coût maximal réalisable par l'adversaire.

De même, on dit qu'une politique d'évasion : $(\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ est *meilleure* que la politique d'évasion : $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$, si pour toute politique de poursuite : $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$, il existe une politique de poursuite : $(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1)$ telle que :

$$\begin{aligned} & J_o [(\gamma_1^1, \tilde{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \tilde{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \tilde{\gamma}_N^2)] \\ & \geq J_o [(\hat{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\hat{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\hat{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\inf_{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(\gamma_1^1, \tilde{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \tilde{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \tilde{\gamma}_N^2)] \\ \geq \inf_{(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(\hat{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\hat{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\hat{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

On dit que $(\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ est *optimale* si elle est meilleure que toute autre politique d'évasion, ce qui implique :

$$\inf_{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(\gamma_1^1, \tilde{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \tilde{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \tilde{\gamma}_N^2)] \\ = \max_{(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2) \in \mathcal{S}_0^2} \left\{ \inf_{(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(\hat{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\hat{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\hat{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \right\}$$

L'évadé cherche donc, lui, à maximiser le coût minimal réalisable par l'adversaire.

Par ailleurs, étant donné une politique de poursuite $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ et deux politiques d'évasion : $(\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ et $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$, on dit que $(\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ est *meilleure relativement* à $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ que $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ si :

$$J_0 [(\gamma_1^1, \tilde{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \tilde{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \tilde{\gamma}_N^2)] \leq J_0 [(\gamma_1^1, \gamma_1^2), (\gamma_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \gamma_N^2)]$$

On appelle politique *conjuguée* de $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ une politique d'évasion : $(\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ meilleure relativement à $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ que toute autre, c'est-à-dire telle que :

$$J_0 [(\gamma_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] = \max_{(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2) \in \mathcal{S}_0^2} J_0 [(\gamma_1^1, \gamma_1^2), \dots, (\gamma_N^1, \gamma_N^2)]$$

De même, étant donné une politique d'évasion $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ et deux politiques de poursuite : $(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1)$ et $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ on dit que $(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1)$ est *meilleure relativement* à $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ que $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ si :

$$J_0 [(\gamma_1^1, \gamma_1^2), (\gamma_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \gamma_N^2)] \geq J_0 [(\hat{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\hat{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\hat{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

On appelle politique *conjuguée* de $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ une politique de poursuite $(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_2^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1)$ meilleure relativement à $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ que toute autre, c'est-à-dire telle que :

$$J_0 [(\hat{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\hat{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\hat{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] = \min_{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(\gamma_1^1, \gamma_1^2), \dots, (\gamma_N^1, \gamma_N^2)]$$

On peut à ce propos remarquer que si l'un des deux joueurs connaissait la politique de l'adversaire, il aurait intérêt à jouer lui-même la politique conjuguée plutôt que la politique optimale.

Si toute politique de poursuite admet une conjuguée, alors la politique de poursuite $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ est optimale si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \max_{(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2) \in \mathcal{S}_0^2} J_0 [(\tilde{y}_1^1, y_1^2), (\tilde{y}_2^1, y_2^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2)] \\ &= \min_{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} \left\{ \max_{(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2) \in \mathcal{S}_0^2} J_0 [(y_1^1, y_1^2), (y_2^1, y_2^2), \dots, (y_N^1, y_N^2)] \right\} \end{aligned}$$

De même, si toute politique d'évasion admet une conjuguée, alors la politique d'évasion $(\tilde{y}_1^2, \tilde{y}_2^2, \dots, \tilde{y}_N^2)$ est optimale si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \min_{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(y_1^1, \tilde{y}_1^2), (y_2^1, \tilde{y}_2^2), \dots, (y_N^1, \tilde{y}_N^2)] \\ &= \max_{(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2) \in \mathcal{S}_0^2} \left\{ \min_{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1) \in \mathcal{S}_0^1} J_0 [(y_1^1, y_1^2), (y_2^1, y_2^2), \dots, (y_N^1, y_N^2)] \right\} \end{aligned}$$

Notons enfin que, dans le cas particulier où l'espace des commandes d'évasion $\mathcal{U}^2$ est réduit à un seul point, l'espace des commandes de poursuite $\mathcal{U}^1$ peut être identifié à $\mathcal{U}$ et, une seule politique d'évasion étant possible, toute politique de poursuite peut être identifiée à une politique. On constate alors facilement que les notions de politique de poursuite meilleure, ou meilleure relativement à une politique d'évasion, (respectivement de politique de poursuite optimale ou conjuguée d'une politique d'évasion) coïncident avec la notion de politique meilleure (respectivement de politique optimale) telle qu'on l'a définie au paragraphe I.

II.2. Politiques partielles de poursuite et d'évasion

Conformément à la définition du paragraphe I, on appelle coût partiel à l'instant k ($1 \leq k \leq N$) associé à la politique $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ un représentant : $J_k(y_1, y_2, \dots, y_N)$ de l'espérance conditionnelle :

$$E \left\{ \sum_{j=k}^N \bar{L}_j(y_1, y_2, \dots, y_j) / \bar{\mathcal{Y}}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \right\}$$

(où $\bar{\mathcal{Y}}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ est la σ -algèbre engendrée par : $\bar{\mathcal{Y}}_0, \bar{\mathcal{Y}}_1(y_1), \dots, \bar{\mathcal{Y}}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$)

On appelle *politique partielle de poursuite*, respectivement *d'évasion*, à l'instant k , $1 \leq k \leq N$, une suite de $N-k+1$ tactiques de poursuite $(y_k^1, y_{k+1}^1, \dots, y_N^1)$, respectivement d'évasion $(y_k^2, y_{k+1}^2, \dots, y_N^2)$, aux instants : $k, k+1, \dots, N$. Une politique partielle à l'instant k est donc le couple d'une politique partielle de poursuite et d'une politique partielle d'évasion à l'instant k .

Les définitions et résultats qui suivent sont donnés en vue d'un théorème d'optimalité pour les politiques de poursuite. En échangeant dans l'exposé ci-dessous, les rôles du poursuivant et de l'évadé et en changeant le sens des inégalités, on obtient des définitions et des résultats similaires qui conduisent à un théorème d'optimalité pour les politiques d'évasion.

On dit qu'une politique partielle de poursuite à l'instant k : $(\tilde{y}_k^1, \tilde{y}_{k+1}^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ est meilleure que la politique partielle de poursuite : $(y_k^1, y_{k+1}^1, \dots, y_N^1)$, si, quelle que soit la politique partielle d'évasion : $(y_k^2, y_{k+1}^2, \dots, y_N^2)$, il existe une politique partielle d'évasion : $(\hat{y}_k^2, \hat{y}_{k+1}^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ telle que, pour toute politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$, on ait :

$$J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

$(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est dite *optimale* (à l'instant k) si elle est meilleure que toute autre politique de poursuite à l'instant k .

Une politique de poursuite $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_2^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est dite *optimale à chaque instant* si, pour tout $k = 1, 2, \dots, N$ la politique partielle de poursuite $(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est optimale à l'instant k . Une telle politique de poursuite étant optimale à l'instant 1 est en particulier, d'après le lemme I,3.1 appliqué pour $k = 0$, une politique de poursuite optimale.

Etant donné, à l'instant k , une politique partielle de poursuite $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$ et deux politiques partielles d'évasion $(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ et $(\gamma_k^2, \gamma_{k+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$, on dit que $(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ est *meilleure relativement* à $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$ que $(\gamma_k^2, \gamma_{k+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$ si, pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a :

$$J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \gamma_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \gamma_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

$(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ est dite *conjuguée* (à l'instant k) de $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$ si elle est meilleure relativement à $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$ que toute autre politique partielle d'évasion à l'instant k .

Une politique d'évasion $(\hat{\gamma}_1^2, \hat{\gamma}_2^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ est dite *conjuguée à chaque instant* d'une politique de poursuite $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ si, pour tout $k = 1, 2, \dots, N$, la politique partielle d'évasion $(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ est conjuguée à l'instant k de la politique partielle de poursuite $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$. D'après le lemme I,3.1, appliqué pour $k = 0$, une telle politique d'évasion est en particulier conjuguée de $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$.

Les deux théorèmes suivants généralisent aux jeux séquentiels le critère d'optimalité du théorème I,3.2.

THÉOREME II,2.1.

Soit $(\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \tilde{\gamma}_{k+2}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ une politique partielle de poursuite optimale à l'instant $k+1$.

Pour que la politique partielle de poursuite $(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \tilde{\gamma}_{k+2}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ soit optimale à l'instant k , il faut et il suffit qu'elle soit meilleure à l'instant k que $(\gamma_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \tilde{\gamma}_{k+2}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ quelle que soit la tactique de poursuite à l'instant k : γ_k^1

DÉMONSTRATION :

La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Par hypothèse, quelle que soit γ_k^1 , $(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ est meilleure que $(\gamma_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ c'est-à-dire, pour toute politique partielle d'évasion $(\gamma_k^2, \gamma_{k+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$, il existe une politique partielle d'évasion $(\tilde{\gamma}_k^2, \tilde{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ telle que, quelle que soit la politique d'horizon $k-1$ $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$:

$$(II.1) \quad \begin{aligned} & J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\tilde{\gamma}_R^1, \gamma_R^2), (\tilde{\gamma}_{R+1}^1, \gamma_{R+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\check{\gamma}_{R+1}^1, \check{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\check{\gamma}_N^1, \check{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

$(\check{\gamma}_{R+1}^1, \check{\gamma}_{R+2}^1, \dots, \check{\gamma}_N^1)$ étant par ailleurs supposée optimale à l'instant $R+1$, il existe, quelle que soit la politique partielle de poursuite : $(\gamma_{R+1}^1, \gamma_{R+2}^1, \dots, \gamma_N^1)$ une politique partielle d'évasion : $(\hat{\gamma}_{R+1}^2, \hat{\gamma}_{R+2}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ telle que, quelle que soit $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1})$:

$$\begin{aligned} & J_{R+1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\check{\gamma}_{R+1}^1, \check{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\check{\gamma}_N^1, \check{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_{R+1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\gamma_{R+1}^1, \hat{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

et par suite, d'après le lemme I,3,1, telle que :

$$(II.2) \quad \begin{aligned} & J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\check{\gamma}_{R+1}^1, \check{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\check{\gamma}_N^1, \check{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\gamma_{R+1}^1, \hat{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

En comparant les inégalités (II.1) et (II.2), on voit que, quelles que soient $(\gamma_R^1, \gamma_{R+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$, et $(\gamma_R^2, \gamma_{R+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$, il existe une politique partielle d'évasion : $(\check{\gamma}_R^2, \hat{\gamma}_{R+1}^2, \hat{\gamma}_{R+2}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ telle que, quelle que soit $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1})$:

$$\begin{aligned} & J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\tilde{\gamma}_R^1, \gamma_R^2), (\tilde{\gamma}_{R+1}^1, \gamma_{R+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_R [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1}, (\gamma_R^1, \check{\gamma}_R^2), (\gamma_{R+1}^1, \hat{\gamma}_{R+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

ce qui, par définition, signifie que $(\check{\gamma}_R^1, \check{\gamma}_{R+1}^1, \dots, \check{\gamma}_N^1)$ est optimale à l'instant R .

C.Q.F.D.

THÉOREME II,2.2.

Soit $(\hat{\gamma}_{R+1}^2, \hat{\gamma}_{R+2}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ une politique partielle d'évasion conjuguée à l'instant $R+1$ de la politique partielle de poursuite : $(\check{\gamma}_{R+1}^1, \check{\gamma}_{R+2}^1, \dots, \check{\gamma}_N^1)$. Pour que $(\hat{\gamma}_R^2, \hat{\gamma}_{R+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ soit conjuguée à l'instant R de $(\check{\gamma}_R^1, \check{\gamma}_{R+1}^1, \dots, \check{\gamma}_N^1)$, il faut et il suffit qu'elle soit meilleure, relativement à $(\check{\gamma}_R^1, \check{\gamma}_{R+1}^1, \dots, \check{\gamma}_N^1)$ que $(\gamma_R^2, \hat{\gamma}_{R+1}^2, \hat{\gamma}_{R+2}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ quelle que soit la tactique d'évasion à l'instant R : γ_R^2 .

DÉMONSTRATION :

La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Par hypothèse, quelles que soient la politique partielle d'évasion : $(\gamma_R^2, \gamma_{R+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$ et la politique d'horizon $R-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R-1})$, on a les deux inégalités suivantes :

$$J_{k+1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_{k+1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

d'où, d'après le lemme I,3.1 :

$$(II.3) \quad J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

et d'autre part :

$$(II.4) \quad J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

En comparant les deux inégalités (II.3) et (II.4), on obtient :

$$J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)]$$

$$\leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)]$$

quelles que soient $(\gamma_k^2, \gamma_{k+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$ ce qui signifie que $(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ est bien conjuguée de $(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$.

C.Q.F.D.

II,3. Programmation dynamique stochastique

THÉOREME II,3.1.

Supposons que pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

1) la variable aléatoire à $k+1$ commandes L_{k+1} admette, relativement au processus aléatoire à commande $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ une espérance conditionnelle universelle :

$$M_{k+1} : (\mathcal{Y}, y)^{k+1} \times (\mathcal{U}, u)^{k+1} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

2) la variable aléatoire à $k+1$ commandes Y_{k+1} admette, relativement au processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$ une probabilité conditionnelle universelle :

$$R^k : (\mathcal{Y}, y)^{k+1} \times (\mathcal{U}, u)^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{Y}, y)$$

(voir définition du paragraphe V du chapitre 2 et remarque I,4.2).

Soient $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_2^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ une suite de N applications mesurables :

$$\tilde{\gamma}_k^1 : (\mathcal{Y}, y)^k \times (\mathcal{U}, u)^{k+1} \longrightarrow (\mathcal{U}, u_1)$$

et $(\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_N^2)$ une suite de N applications mesurables :

$$\chi_k^2 : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^{k-1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

La suite $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ constitue donc une politique de poursuite et la suite $(\hat{y}_1^2, \hat{y}_2^2, \dots, \hat{y}_N^2)$, définie en posant pour $k = 1, 2, \dots, N$, $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} & \hat{y}_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ &= \chi_k^2[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \end{aligned}$$

une politique d'évasion.

Soient $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_N$ les fonctions réelles positives mesurables :

$$C_k : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y})^k \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

définies par l'équation récurrente rétrograde (de la programmation dynamique) :

$$\begin{aligned} C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) &= M_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ &+ \int_{\mathcal{Y}} C_{k+1}[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, \\ &\quad \tilde{y}_{k+1}^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \hat{y}_{k+1}^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \end{aligned} \quad (II.5)$$

$$R^{k-1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k)$$

avec $C_{N+1} = 0$

Si, quels que soient $k = 1, 2, \dots, N$, $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$ et $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, (u_k^1, u_k^2) \in \mathcal{U}$ les fonctions χ_k^2 et $\tilde{y}_k^1$ vérifient les deux inéquations (de la programmation dynamique) :

$$\begin{aligned} & C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, u_k^2) \\ & \leq C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned} \quad (II.6)$$

et :

$$\begin{aligned} & C_k \left\{ y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \right. \\ & \quad \left. \chi_k^2[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \right\} \\ & \leq C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned} \quad (II.7)$$

alors, la politique de poursuite $(\hat{y}_1^1, \hat{y}_2^1, \dots, \hat{y}_N^1)$ est optimale à chaque instant et admet la politique d'évasion $(\hat{y}_1^2, \hat{y}_2^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ pour conjuguée à chaque instant.

DEMONSTRATION :

Rappelons que, si on désigne par $\{\alpha_1(y_1), \alpha_2(y_1, y_2), \dots, \alpha_k(y_1, y_2, \dots, y_k)\}$ le bouclage associé à la politique $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$, l'équation (II,5) implique, d'après le lemme I,4.1 :

$$\begin{aligned} & C_k [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ & \quad \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, (\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\hat{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon k : $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)$.

Pour une tactique de poursuite à l'instant k : y_k^1 donnée, on désignera par $\bar{y}_k^2(y_k^1)$ la tactique d'évasion à l'instant k définie par :

$$\begin{aligned} & \bar{y}_k^2(y_k^1) (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ & = \chi_k^2 [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, y_k^1 (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \end{aligned}$$

Admettons l'hypothèse récurrente que la politique partielle de poursuite à l'instant $k+1$:

$(\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+2}^1, \dots, \hat{y}_N^1)$ est optimale et que la politique partielle d'évasion à l'instant $k+1$:

$(\hat{y}_{k+1}^2, \hat{y}_{k+2}^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ est sa conjuguée. D'après l'inégalité (II,6), on a, quelle que soit la politique d'horizon k : $\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (y_k^1, y_k^2)\}$:

$$\begin{aligned} & J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (y_k^1, y_k^2), (\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\hat{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{\leq} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (y_k^1, \bar{y}_k^2(y_k^1)), (\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\hat{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned}$$

D'après le théorème II,2.2. la politique partielle d'évasion $\{\bar{y}_k^2(y_k^1), \hat{y}_{k+1}^2, \hat{y}_{k+2}^2, \dots, \hat{y}_N^2\}$ est donc conjuguée de la politique partielle de poursuite $(y_k^1, \hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+2}^1, \dots, \hat{y}_N^1)$ et, en particulier, $(\hat{y}_k^2, \hat{y}_{k+1}^2, \hat{y}_{k+2}^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ est conjuguée de $(\hat{y}_k^1, \hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+2}^1, \dots, \hat{y}_N^1)$.

D'après l'inégalité (II,7) quelles que soient la politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ et la tactique de poursuite y_k^1 on a :

$$\begin{aligned} & J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\hat{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\hat{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{\leq} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (y_k^1, \bar{y}_k^2(y_k^1)), (\hat{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\hat{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned} \quad (\text{II,8})$$

Or, puisque $(\hat{y}_k^2, \hat{y}_{k+1}^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ est conjuguée de $(\tilde{y}_k^1, \tilde{y}_{k+1}^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$, quelles que soient $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ et la politique partielle d'évasion $(y_k^2, y_{k+1}^2, \dots, y_N^2)$ on a :

$$\begin{aligned} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, y_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, y_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2)] \\ \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned}$$

et par suite d'après l'inégalité (II.8) :

$$\begin{aligned} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, y_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, y_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, y_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2)] \\ \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, \bar{y}_k^2(\tilde{y}_k^1)), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned}$$

Cela veut dire que la politique partielle de poursuite $(\tilde{y}_k^1, \tilde{y}_{k+1}^1, \tilde{y}_{k+2}^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ est meilleure que $(y_k^1, y_{k+1}^1, y_{k+2}^1, \dots, y_N^1)$, quelle que soit la tactique y_k^1 . Elle est donc optimale d'après le théorème II,2.1.

Il reste à montrer que l'hypothèse récurrente est vérifiée pour $k+1 = N$. Il suffit pour cela de reprendre le raisonnement précédent en faisant $k = N$ et de remarquer qu'il n'est plus besoin alors de faire appel aux théorèmes II,2.1 et II,2.2.

C.Q.F.D.

REMARQUE II,3.2.

Pour tenter d'obtenir une politique de poursuite optimale $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ et sa politique d'évasion conjuguée $(\hat{y}_1^2, \hat{y}_2^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ on procèdera en pratique de la façon suivante : supposant connue à l'instant $k+1$ la politique partielle $\{(\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)\}$ on construit les fonctions de Bellman associées : $C_N, C_{N-1}, \dots, C_{k+1}, C_k$ au moyen de l'équation (II.5) puis on cherche successivement :

- une application χ_k^2 vérifiant l'inéquation (II.6) ;
- une tactique de poursuite $\tilde{y}_k^1$ vérifiant l'inéquation (II.7),

d'où l'on déduit la tactique d'évasion $\hat{y}_k^2$; on recommence alors de même à l'instant k .

Là encore se pose le problème de l'existence et de la mesurabilité des applications χ_k^2 et $\tilde{y}_k^1$, dans le cas général.



III - OPTIMISATION AVEC PROCESSUS DE CÔÛT A VALEURS POSITIVES OU NÉGATIVES

III.1. Position du problème

L'exposé qui suit est fait dans le cadre des jeux séquentiels. Les résultats obtenus pourront à plus forte raison être appliqués à des problèmes d'optimisation à un seul joueur, considérés comme des jeux séquentiels où l'espace de commande d'un des joueurs est réduit à un point.

Considérons donc à nouveau le problème de jeu séquentiel posé en II.1, mais supposons maintenant que le processus de coût $\{L_k\}$ prend des valeurs réelles quelconques (et non plus seulement réelles positives).

Dans le cas où pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$, L_k est borné inférieurement (respectivement supérieurement) par une variable aléatoire réelle B_k P -intégrable, il est facile de se ramener au cas étudié en II en remplaçant L_k par $L_k - B_k$ (respectivement par $B_k - L_k$ et en échangeant poursuivant et évadé).

Dans le cas contraire, la théorie du paragraphe II ne peut pas être utilisée sans profondes modifications, du fait des difficultés posées par les définitions du coût total et des coûts partiels.

Etant donné une variable aléatoire réelle Z définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on ne sait en effet définir l'espérance mathématique (ou l'espérance conditionnelle) de Z que si l'une au moins des variables aléatoires positives Z^+ et Z^- , appelées parties positive et négative et définies par :

$$Z^+ = \begin{cases} Z & \text{si } Z \geq 0 \\ 0 & \text{si } Z \leq 0 \end{cases} \quad \text{et :} \quad Z^- = \begin{cases} 0 & \text{si } Z \geq 0 \\ -Z & \text{si } Z \leq 0 \end{cases}$$

est P -intégrable, c'est-à-dire si Z est P -quasi-intégrable (cf. Neveu [23], p. 39, 40 et 115 et annexe parag. I).

Donc, pour pouvoir définir le coût total d'une politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ comme on l'a fait en I et II par l'espérance :

$$J_0(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{j=0}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) \right\}$$

où le coût partiel à l'instant k par l'espérance conditionnelle :

$$J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{j=k}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) / \bar{Y}_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \right\}$$

il faudrait que : $\left(\sum_{j=0}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) \right)^+$ ou $\left(\sum_{j=0}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) \right)^-$
et respectivement : $\left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) \right)^+$ ou $\left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) \right)^-$

soient P -intégrables.

Mais rien ne prouve qu'il en soit ainsi pour toute politique, si L_k n'est pas borné inférieurement ou supérieurement par B_k . Il est donc nécessaire de se restreindre à une classe de politiques « admissibles » pour lesquelles on sache définir le coût total et par suite l'optimalité.

III,2. Politiques admissibles - Coût partiel

On désignera par L_k^+ et L_k^- les parties positive et négative du processus de coût L_k . On remarque que :

$$\overline{L_k^+}(y_1, y_2, \dots, y_k) = \left[\overline{L_k}(y_1, y_2, \dots, y_k) \right]^+$$

$$\overline{L_k^-}(y_1, y_2, \dots, y_k) = \left[\overline{L_k}(y_1, y_2, \dots, y_k) \right]^-$$

pour toute politique d'horizon $k : (y_1, y_2, \dots, y_k)$.

A toute politique d'horizon $N : (y_1, y_2, \dots, y_N)$ on associe les variables aléatoires positives :

$$^*J_0, ^*J_1, \dots, ^*J_k, \dots, ^*J_N \quad \text{et} \quad {}^*J_0, {}^*J_1, \dots, {}^*J_k, \dots, {}^*J_N$$

définies à une égalité presque sûre près par les équations de récurrence :

$$^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \overline{L_k^+}(y_1, y_2, \dots, y_k) + J_{k+1}^+(y_1, y_2, \dots, y_N) / \overline{y}_{k+1} \right\}$$

$${}^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \overline{L_k^-}(y_1, y_2, \dots, y_k) + J_{k+1}^-(y_1, y_2, \dots, y_N) / \overline{y}_{k+1} \right\}$$

$$\text{avec : } J_{N+1}^+ = J_{N+1}^- = 0$$

et :

$$J_{k+1}^+ = \begin{cases} +\infty & \text{si } ^*J_{k+1} = +\infty \\ ^*J_{k+1} - {}^*J_{k+1} & \text{si } ^*J_{k+1} \neq +\infty \text{ et } ^*J_{k+1} - {}^*J_{k+1} \geq 0 \\ 0 & \text{si } ^*J_{k+1} \neq +\infty \text{ et } ^*J_{k+1} - {}^*J_{k+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$J_{k+1}^- = \begin{cases} +\infty & \text{si } {}^*J_{k+1} = +\infty \\ {}^*J_{k+1} - ^*J_{k+1} & \text{si } {}^*J_{k+1} \neq +\infty \text{ et } {}^*J_{k+1} - ^*J_{k+1} \leq 0 \\ 0 & \text{si } {}^*J_{k+1} \neq +\infty \text{ et } {}^*J_{k+1} - ^*J_{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

(Rappelons que $\overline{y}_{k+1}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) = \sigma \left\{ \overline{y}_0, \overline{y}_1(y_1), \dots, \overline{y}_{k+1}(y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \right\}$; on remarquera en particulier que *J_0 et *J_0 sont des variables aléatoires $\overline{y}_{-1}$ -mesurables c'est-à-dire des constantes).

Considérons les sous-ensembles mesurables de Ω (définis à un ensemble de probabilité nulle près),

$$^*\mathcal{N}_k(y_1, y_2, \dots, y_N) = \left\{ \omega \in \Omega : ^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N) [\omega] = +\infty \right\}$$

$${}^*\mathcal{N}_k(y_1, y_2, \dots, y_N) = \left\{ \omega \in \Omega : {}^*J_k(y_1, y_2, \dots, y_N) [\omega] = +\infty \right\}$$

Nous dirons que la politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est *admissible* si pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \cap {}^* \mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \right\} = 0$$

La classe des politiques admissibles sera notée $\hat{\mathcal{D}}_0$.

Pour toute politique admissible $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ la variable aléatoire réelle :

$$J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = {}^* J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - {}^* J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$$

est P -presque partout définie, quel que soit $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

$J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ sera appelé *coût partiel* à l'instant k si $k \geq 1$, ou *coût total* si $k = 0$, associé à la politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$.

Si $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est admissible $J_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ et $J_k^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ sont presque partout égales à la partie positive et la partie négative de $J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$.

Nous dirons par ailleurs que le processus de coût : $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, L_N)$ est *modéré* si pour tout entier k , $0 \leq k \leq N$, et toute politique : $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_N)$:

$$E \left\{ \frac{\bar{L}_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}{\bar{Y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} <_{P.S.} + \infty$$

$$E \left\{ \frac{\bar{L}_k^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}{\bar{Y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} <_{P.S.} + \infty$$

Il sera nécessaire, dans la plupart des démonstrations, de supposer que le coût est modéré. Cela n'implique pas que toute politique soit forcément admissible. Mais on a alors, pour toute politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ et tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$(III.1) \left\{ \begin{array}{l} {}^* \mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{P.S.}{=} \left\{ \omega : E \left\{ J_{k+1}^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \bar{Y}_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \right\} [\omega] = + \infty \right\} \\ {}^* \mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{P.S.}{=} \left\{ \omega : E \left\{ J_{k+1}^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \bar{Y}_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \right\} [\omega] = + \infty \right\} \end{array} \right.$$

Les définitions que nous venons de donner peuvent être justifiées par les résultats suivants :

LEMME III,2.1.

Si $L_k \geq 0$, alors toute politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est admissible et pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$(III.2) \left\{ \begin{array}{l} {}^* J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = 0 \\ {}^* J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{j=k}^N \bar{L}_j(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j) / \bar{Y}_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \right\} \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION :

Puisque $L_N^+ = L_N$ et $L_N^- = 0$, les formules (III.2) sont vraies pour $k=N$. Supposons les vraies pour $k+1$. Alors :

$$J_{k+1}^{-} (y_1, y_2, \dots, y_N) = 0$$

$$J_{k+1}^{+} (y_1, y_2, \dots, y_N) = J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \sum_{j=k+1}^N \frac{\bar{L}_j^{(y_1, y_2, \dots, y_N)}}{\bar{y}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_N)}} \right\}$$

d'où, puisque, d'une part $L_k^{+} = L_k$, $L_k^{-} = 0$ et d'autre part $\frac{\bar{L}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}}{\bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}} \subset \frac{\bar{L}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)}}{\bar{y}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)}}$:

$$*J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = 0$$

$$*J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \bar{L}_k^{(y_1, y_2, \dots, y_N)} + \sum_{j=k+1}^N \frac{\bar{L}_j^{(y_1, y_2, \dots, y_N)}}{\bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}} \right\}$$

et par suite, les relations (III.2) sont encore vraies pour k .

C.Q.F.D.

LEMME III.2.2.

Considérons une politique $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ et les variables aléatoires réelles positives, ${}^{\circ}J_0, {}^{\circ}J_1, \dots, {}^{\circ}J_N$ et ${}^{\circ}J_0, {}^{\circ}J_1, \dots, {}^{\circ}J_N$ définies à une égalité presque sûre près par :

$${}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j^{(y_1, y_2, \dots, y_N)} \right)^+ / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\}$$

$${}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = E \left\{ \left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j^{(y_1, y_2, \dots, y_N)} \right)^- / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\}$$

Posons :

$${}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = \{ \omega \in \Omega : {}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)[\omega] = +\infty \}$$

$${}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) = \{ \omega \in \Omega : {}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)[\omega] = +\infty \}$$

Si :

- 1) le processus de coût est modéré
- 2) pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$P \left\{ {}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \cap {}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \right\} = 0$$

alors, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$P \left\{ {}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \cap {}^{\circ}\mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \right\} = 0$$

(c'est-à-dire $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ est admissible) et :

$${}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \stackrel{p.s.}{=} {}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^{\circ}J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \stackrel{\Delta}{=} J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

REMARQUE

Si la politique $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est telle que, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$, $\sum_{j=k}^N \frac{\overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)}}{\overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})}}$ soit P -quasi intégrable, alors nécessairement :

$$P \left\{ {}^0\mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \cap {}^0\mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \right\} = 0$$

et, par définition :

$${}^0J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - {}^0J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = E \left\{ \sum_{j=k}^N \frac{\overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)}}{\overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})}} \right\}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME :

Montrons d'abord que, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$(III.3) \left\{ \begin{array}{l} {}^0\mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{p.s.}{=} \left\{ \omega : E \left\{ {}^0J_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{L}_{k+1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1})} \right\} [\omega] = +\infty \right\} \\ {}^0\mathcal{N}_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{p.s.}{=} \left\{ \omega : E \left\{ {}^0J_{k+1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{L}_{k+1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1})} \right\} [\omega] = +\infty \right\} \end{array} \right.$$

En effet :

$$\sum_{j=k}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} = \sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} + \overline{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}$$

d'où

$$(III.4) \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^+ \leq \left(\sum_{j=k}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^+ + \overline{L}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \\ \leq \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^+ + \overline{L}_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) + \overline{L}_k^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \\ \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^- \leq \left(\sum_{j=k}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^- + \overline{L}_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \\ \leq \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right)^- + \overline{L}_k^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) + \overline{L}_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \end{array} \right.$$

On a supposé le processus de coût modéré c'est-à-dire :

$$E \left\{ \frac{\overline{L}_k^+(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}{\overline{L}_{k+1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1})}} \right\} <_{p.s.} +\infty$$

$$E \left\{ \frac{\overline{L}_k^-(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)}{\overline{L}_{k+1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1})}} \right\} <_{p.s.} +\infty$$

pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$

Il suffit de remarquer que, puisque $\overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \subset \overline{y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k)}$, on a :

$$E \left\{ \circ J_{k+1} (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} \\ \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right) / \overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\}$$

$$E \left\{ \circ J_{k+1} (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} \\ \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \left(\sum_{j=k+1}^N \overline{L}_j^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j)} \right) / \overline{y}_k^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\}$$

et de passer aux espérances conditionnelles par rapport à $\overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})}$ dans les inégalités (III.4) pour obtenir le résultat cherché (formules (III.3)).

Par ailleurs, le processus de coût étant modéré :

$$(III.1) \left\{ \begin{array}{l} {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \left\{ \omega : E \left\{ J_{k+1}^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} [\omega] = +\infty \right\} \\ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \left\{ \omega : E \left\{ J_{k+1}^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) / \overline{y}_{k-1}^{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})} \right\} [\omega] = +\infty \right\} \end{array} \right.$$

pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Or, par construction :

$${}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$$

$${}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$$

Par suite :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \cap {}^* \mathcal{N}_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \right\} \\ = P \left\{ \circ \mathcal{N}_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \cap \circ \mathcal{N}_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \right\} = 0$$

$$\text{et } {}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - {}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$$

d'où

$$J_N^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \triangleq [{}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - {}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)]^+ \stackrel{\text{p.s.}}{=} [\circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)]^+$$

$$J_N^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \triangleq [{}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - {}^* J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)]^- \stackrel{\text{p.s.}}{=} [\circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) - \circ J_N (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)]^-$$

Supposons alors que, pour $k+1$:

$$J_{k+1}^+ (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{=} [{}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N)]^+$$

$$J_{k+1}^- (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{=} [{}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N)]^-$$

On a donc :

$$J_{k+1}^+ (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{\leq} {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$$J_{k+1}^- (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{\leq} {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

ce qui implique d'après les formules (III.1) et (III.3) :

$$^* \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{\subset} {}^\circ \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$$^* \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{\subset} {}^\circ \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

d'où l'on déduit :

$$P \{ ^* \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \cap {}^\circ \mathcal{N}_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \} = 0$$

Comme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^N \bar{L}_j^+ (y_1, y_2, \dots, y_j) &= \left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j^+ (y_1, y_2, \dots, y_j) \right)^+ - \left(\sum_{j=k}^N \bar{L}_j^- (y_1, y_2, \dots, y_j) \right)^- \\ &= \left(\sum_{j=k+1}^N \bar{L}_j^+ (y_1, y_2, \dots, y_j) \right)^+ - \left(\sum_{j=k+1}^N \bar{L}_j^- (y_1, y_2, \dots, y_j) \right)^- + \bar{L}_k^+ (y_1, y_2, \dots, y_k) - \bar{L}_k^- (y_1, y_2, \dots, y_k) \end{aligned}$$

et que, par hypothèse :

$$J_{k+1}^+ (y_1, y_2, \dots, y_N) - J_{k+1}^- (y_1, y_2, \dots, y_N) \underset{\text{p.s.}}{=} {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

on a :

$$\begin{aligned} & {}^\circ J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^\circ J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \\ & \underset{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \bar{L}_k^+ (y_1, y_2, \dots, y_k) / \bar{y}_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \right\} - E \left\{ \bar{L}_k^- (y_1, y_2, \dots, y_k) / \bar{y}_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \right\} \\ & + E \left\{ {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) / \bar{y}_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \right\} - E \left\{ {}^\circ J_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_N) / \bar{y}_{k+1} (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &=_{p.s.} E \left\{ \bar{L}_k^+ (y_1, y_2, \dots, y_k) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} - E \left\{ \bar{L}_k^- (y_1, y_2, \dots, y_k) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \\
 &+ E \left\{ J_{k+1}^+ (y_1, y_2, \dots, y_N) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} - E \left\{ J_{k+1}^- (y_1, y_2, \dots, y_N) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \\
 &\stackrel{p.s.}{=} {}^* J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^* J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) \stackrel{p.s.}{=} J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)
 \end{aligned}$$

Il est en effet licite d'écrire cette suite d'égalités, puisque, sauf peut être sur un P -négligeable, elles ne comportent pas de termes indéterminés du type : $+\infty - \infty$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 J_k^+ (y_1, y_2, \dots, y_N) &\stackrel{p.s.}{=} [{}^o J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^o J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)]^+ \\
 J_k^- (y_1, y_2, \dots, y_N) &\stackrel{p.s.}{=} [{}^o J_k (y_1, y_2, \dots, y_N) - {}^o J_k (y_1, y_2, \dots, y_N)]^-
 \end{aligned}$$

En raisonnant ainsi de proche en proche, on obtient la conclusion annoncée.

C.Q.F.D.

III,3. Admissibilité et optimalité d'une politique de poursuite

On dira qu'une politique d'évasion $(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2)$ est *admissible relativement* à une politique de poursuite $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$ si $\{(y_1^1, y_1^2), (y_2^1, y_2^2), \dots, (y_N^1, y_N^2)\}$ est admissible.

On dira qu'une politique de poursuite $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$ est *admissible* s'il existe au moins une politique d'évasion $(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2)$ qui soit admissible relativement à $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$.

On désignera respectivement par $\hat{\mathcal{D}}_0^2 (y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$ et $\hat{\mathcal{D}}_0^1$ l'ensemble des politiques d'évasion admissible relativement à $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$ et l'ensemble des politiques de poursuite admissibles.

On dira que $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1) \in \hat{\mathcal{D}}_0^1$ est *meilleure* que $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1) \in \hat{\mathcal{D}}_0^1$ et on notera :

$$(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1) \prec (y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$$

si quelle que soit $(y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2) \in \hat{\mathcal{D}}_0^2 (\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ il existe $(\hat{y}_1^2, \hat{y}_2^2, \dots, \hat{y}_N^2) \in \hat{\mathcal{D}}_0^2 (y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1)$ telle que :

$$\mathcal{J}_0 [(\tilde{y}_1^1, y_1^2), (\tilde{y}_2^1, y_2^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2)] \leq \mathcal{J}_0 [(y_1^1, \hat{y}_1^2), (y_2^1, \hat{y}_2^2), \dots, (y_N^1, \hat{y}_N^2)]$$

Il est clair que $\hat{\mathcal{D}}_0^1$ est partiellement ordonné par la relation binaire : $\prec$

On dira que $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ est *optimale* si c'est une borne inférieure de $\hat{\mathcal{D}}_0^1$ pour : $\prec$ (autrement dit si elle est meilleure que toute autre politique de poursuite admissible). Cela implique :

$$\begin{aligned} & \sup_{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, \dots, \tilde{\gamma}^N)} J_0 [(\tilde{\gamma}^1, \gamma^2), (\tilde{\gamma}^2, \gamma^2), \dots, (\tilde{\gamma}^N, \gamma^2)] \\ &= \min_{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^1} \left\{ \sup_{(\hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)} J_0 [(\gamma^1, \hat{\gamma}^2), (\gamma^2, \hat{\gamma}^2), \dots, (\gamma^N, \hat{\gamma}^2)] \right\} \end{aligned}$$

Etant donné $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^1$ fixée, on dira que $(\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ est meilleure que $(\gamma^2, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ (relativement à $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N$) et on notera :

$$(\gamma^2, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \underset{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)}{<} (\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N)$$

si :

$$J_0 [(\gamma^1, \gamma^2), (\gamma^2, \gamma^2), \dots, (\gamma^N, \gamma^2)] \leq J_0 [(\gamma^1, \hat{\gamma}^2), (\gamma^2, \hat{\gamma}^2), \dots, (\gamma^N, \hat{\gamma}^2)]$$

Il est clair que $\tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ est partiellement ordonné par : $(\gamma^2, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \underset{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)}{<} (\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N)$

On dira que $(\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ est *conjugée* de $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ si c'est une borne supérieure de $\tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ pour : $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \underset{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)}{<} (\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N)$. Il est équivalent de dire :

$$J_0 [(\gamma^1, \hat{\gamma}^2), (\gamma^2, \hat{\gamma}^2), \dots, (\gamma^N, \hat{\gamma}^2)]$$

$$= \max_{(\gamma^2, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)} J_0 [(\gamma^1, \gamma^2), (\gamma^2, \gamma^2), \dots, (\gamma^N, \gamma^2)]$$

Si toute $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^1$ admet une conjugée dans $\tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$, alors $(\hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N)$ est optimale dans $\tilde{\mathcal{S}}_0^1$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \max_{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, \dots, \tilde{\gamma}^N)} J_0 [(\tilde{\gamma}^1, \gamma^2), (\tilde{\gamma}^2, \gamma^2), \dots, (\tilde{\gamma}^N, \gamma^2)] \\ &= \min_{(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^1} \left\{ \max_{(\hat{\gamma}^2, \hat{\gamma}^2, \dots, \hat{\gamma}^N) \in \tilde{\mathcal{S}}_0^2(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)} J_0 [(\gamma^1, \hat{\gamma}^2), (\gamma^2, \hat{\gamma}^2), \dots, (\gamma^N, \hat{\gamma}^2)] \right\} \end{aligned}$$

Les définitions précédentes sont tout à fait comparables à celles données en II,1, à cette nuance près que la politique d'évasion doit être choisie de façon à constituer, avec la politique de poursuite, une politique *admissible*, et que la politique de poursuite doit être telle que ce choix soit possible.

Il va sans dire qu'en échangeant le rôle du poursuivant et de l'évadé, et en changeant le sens des inégalités, on pourrait définir de même l'admissibilité et l'optimalité d'une politique d'évasion, l'admissibilité, relativement à une politique d'évasion, d'une politique de poursuite, et la conjuguée d'une politique d'évasion. De la même façon, on pourrait d'ailleurs obtenir immédiatement, à partir du théorème d'optimalité pour une politique de poursuite que nous donnerons en III,5, un théorème d'optimalité pour une politique d'évasion.

III,4. Politiques partielles admissibles

Une politique partielle à l'instant k : $(\gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N)$ sera dite *admissible à l'instant k* si, quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a, pour tout $i = k, k+1, \dots, N$:

$$P \left\{ \mathcal{N}_i^* (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N) \cap {}^* \mathcal{N}_i (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N) \right\} = 0$$

Cette propriété permet de définir (sauf éventuellement sur un ensemble P -négligeable) le coût partiel :

$$J_i (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N) \\ \cong {}^* J_i (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N) - {}^* J_i (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_N)$$

à tout instant $i = k, k+1, \dots, N$

Remarquons qu'une politique admissible $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est en particulier une politique partielle admissible à l'instant 1, mais que la réciproque n'est pas forcément vraie.

Le lemme suivant jouera un rôle analogue à celui du lemme I,3.1.

LEMME III,4.1.

Supposons le processus de coût modéré. Soient, pour $k \geq 1$, $(\tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ et $(\bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N)$ deux politiques partielles admissibles à l'instant $k+1$. Supposons que :

1 - pour toute politique d'horizon k : $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ on a l'inégalité :

$$J_{k+1} (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \\ \leq_{p.s.} J_{k+1} (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N)$$

Soit $\overset{\circ}{\gamma}_k$ une tactique à l'instant k .

Si

2 - pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$ on a :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) \right\} = 0$$

alors :

3 - pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$ on a :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \right\} = 0$$

Si

4 - pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$ on a :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \right\} = 0$$

alors :

5 - pour toute politique d'horizon $k-1$, $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) \right\} = 0$$

Dans l'hypothèse 2) comme dans l'hypothèse 4) les politiques partielles : $(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N)$ et $(\tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ sont donc admissibles à l'instant k . De plus :

6 - on a l'inégalité :

$$J_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \leq_{p.s.} J_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N)$$

quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$.

DEMONSTRATION :

Montrons que les hypothèses 1) et 2) entraînent les conclusions 3) et 6).

En effet, d'après l'hypothèse 1), quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a l'inégalité :

$$J_{k+1}^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \leq_{p.s.} J_{k+1}^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N)$$

De l'inégalité obtenue en prenant l'espérance conditionnelle des deux membres par rapport à $\bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on déduit, puisque le processus de coût est supposé modéré (et qu'on a alors les relations (III.1)) :

$$\begin{aligned} & {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \\ & \subset_{p.s.} {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 2), on a donc bien la conclusion 3) :

$$P \left\{ {}^* \mathcal{N}_k (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \right\} = 0$$

pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$.

L'hypothèse 1) implique alors les inégalités suivantes, dans lesquelles n'interviennent pas de formes indéterminées de type $+\infty - \infty$ (sauf peut être sur un ensemble P -négligeable) :

$$\begin{aligned} & E \left\{ J_{k+1}^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \\ & - E \left\{ J_{k+1}^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \\ & + E \left\{ \bar{L}_k^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} - E \left\{ \bar{L}_k^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \\ & \leq_{p.s.} E \left\{ J_{k+1}^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \\ & - E \left\{ J_{k+1}^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \\ & + E \left\{ \bar{L}_k^+ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} - E \left\{ \bar{L}_k^- (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \bar{\gamma}_k) / \bar{y}_{k-1}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) \right\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & {}^*J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) - {}^*J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_{k+1}, \tilde{\gamma}_{k+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N) \\ & \leq_{p.s.} {}^*J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) - {}^*J_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \overset{\circ}{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+2}, \dots, \bar{\gamma}_N) \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon $k-1 : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, ce qui n'est autre que la conclusion 6).

On montre de façon tout à fait analogue que les hypothèses 1) et 4) entraînent les conclusions 5) et 6).

C.Q.F.D.

Pour $k=0$, le lemme III,4.1 prend une forme un peu différente. Nous l'énonçons ci-dessous, sans démonstration, celle-ci étant calquée sur la démonstration précédente.

LEMME III,4.2.

Supposons le processus de coût modéré.

Soient $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ et $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N)$ deux politiques partielles admissibles à l'instant 1 telles que :

$$1 - J_1(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N) \leq_{p.s.} J_1(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N)$$

Si

$$2 - P\{ {}^*N_0(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N) \} = 0$$

alors :

$$3 - P\{ {}^*N_0(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N) \} = 0$$

Si

$$4 - P\{ {}^*N_0(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N) \} = 0$$

alors :

$$5 - P\{ {}^*N_0(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N) \} = 0$$

Dans l'hypothèse 2) comme dans l'hypothèse 4), les politiques $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N)$ et $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N)$ sont donc admissibles. De plus :

$$6 - J_0(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N) \leq_{p.s.} J_0(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N)$$

Le lemme III,4.1 permet de montrer le résultat suivant, qui jouera un rôle analogue à celui des théorèmes II,2.1 et II,2.2.

LEMME III,4.3.

Supposons le processus de coût modéré.

Soient :

- $(\gamma_k^1, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_N^1)$ et $(\tilde{\gamma}_k^1, \tilde{\gamma}_{k+1}^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ deux politiques partielles de poursuite à l'instant k .

- $(\gamma_k^2, \gamma_{k+1}^2, \dots, \gamma_N^2)$, $(\hat{\gamma}_k^2, \hat{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \hat{\gamma}_N^2)$ et $(\bar{\gamma}_k^2, \bar{\gamma}_{k+1}^2, \dots, \bar{\gamma}_N^2)$ trois politiques partielles d'évasion à l'instant k .

Supposons que :

1 - les politiques partielles :

$$\begin{aligned} - & \{ (\tilde{y}_{k+1}^1, y_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, y_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2) \} \\ - & \{ (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2) \} \\ - & \{ (y_{k+1}^1, \bar{y}_{k+1}^2), (y_{k+2}^1, \bar{y}_{k+2}^2), \dots, (y_N^1, \bar{y}_N^2) \} \end{aligned}$$

sont toutes trois admissibles à l'instant $k+1$.

2 - ces trois politiques partielles à l'instant $k+1$ vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_{k+1} [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, (\tilde{y}_{k+1}^1, y_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, y_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, y_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_{k+1} [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_{k+1} [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, (y_{k+1}^1, \bar{y}_{k+1}^2), (y_{k+2}^1, \bar{y}_{k+2}^2), \dots, (y_N^1, \bar{y}_N^2)] \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon k : $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k)$.

3 - les politiques partielles :

$$\begin{aligned} - & \{ (\tilde{y}_k^1, y_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2) \} \\ - & \{ (\tilde{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2) \} \\ - & \{ (y_k^1, \bar{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2) \} \end{aligned}$$

sont toutes trois admissibles à l'instant k .

4 - ces trois politiques partielles à l'instant k vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, y_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (y_k^1, \bar{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+2}^1, \hat{y}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$

5 - pour toute politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$, on a :

$$\begin{aligned} & P \{ {}^* \mathcal{N}_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \} \\ & = P \{ {}^* \mathcal{N}_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{y}_k^1, \hat{y}_k^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)] \} = 0 \end{aligned}$$

Alors les propriétés 1) et 2) sont encore vraies à l'instant k , autrement dit :

6 - les politiques partielles :

$$\begin{aligned} - & \left\{ (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2) \right\} \\ - & \left\{ (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2) \right\} \\ - & \left\{ (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \bar{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2) \right\} \end{aligned}$$

sont admissibles à l'instant k .

7 - ces trois politiques partielles vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \bar{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$

DEMONSTRATION

Montrons d'abord la conclusion 6).

D'après l'hypothèse 4), pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_k^+ [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k^+ [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & J_k^- [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{p.s.} J_k^- [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

d'où, puisque $^*J_k = +\infty$ si et seulement si $J_k^+ = +\infty$

$$\begin{aligned} & ^*\mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \subset_{p.s.} ^*\mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

et, puisque $*J_k = +\infty$ si et seulement si $J_k^- = +\infty$

$$\begin{aligned} & * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \underset{\text{p.5.}}{\subset} * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 5) on a donc, pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$

$$\begin{aligned} & P \{ * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \} \\ & = P \{ * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \} \\ & = 0 \end{aligned}$$

D'après les hypothèses 1) et 2) les conditions sont alors réunies pour pouvoir appliquer le lemme III,4.1 et en déduire que :

a) pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a :

$$P \{ * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \gamma_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \} = 0$$

et :

$$P \{ * \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \bar{\gamma}_{k+1}^2), (\gamma_{k+2}^1, \bar{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \} = 0$$

ce qui implique en particulier la conclusion 6).

b) pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \gamma_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \underset{\text{p.5.}}{\leq} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), (\tilde{\gamma}_{k+2}^1, \hat{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \bar{\gamma}_{k+1}^2), (\gamma_{k+2}^1, \bar{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \\ & \underset{\text{p.5.}}{\leq} J_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), (\gamma_{k+1}^1, \bar{\gamma}_{k+1}^2), (\gamma_{k+2}^1, \bar{\gamma}_{k+2}^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

La conclusion 7) découle alors immédiatement de l'hypothèse 4).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE III,4.4.

Le processus de coût étant toujours supposé modéré, soient $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_k^1, \dots, \gamma_N^1)$ et $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_2^1, \dots, \tilde{\gamma}_k^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ deux politiques de poursuite, $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_k^2, \dots, \gamma_N^2)$, $(\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \tilde{\gamma}_k^2, \dots, \tilde{\gamma}_N^2)$ et $(\bar{\gamma}_1^2, \bar{\gamma}_2^2, \dots, \bar{\gamma}_k^2, \dots, \bar{\gamma}_N^2)$ trois politiques d'évasion telles que les hypothèses 3) 4) et 5) du lemme précédent soient vérifiées pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

Alors les conclusions 6) et 7) du lemme sont vérifiées pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

DEMONSTRATION :

Pour $k = N$, les hypothèses 3) 4) et 5) impliquent évidemment les conclusions 6) et 7) c'est-à-dire les hypothèses 1) et 2) pour $k = N-1$.

En appliquant le lemme successivement pour $k = N-1, N-2, \dots, 2$, on obtient le résultat annoncé.

C.Q.F.D.

III,5. Programmation dynamique stochastique

Le lemme suivant est une extension du lemme I,4.1 (compte tenu du lemme III,2.1) :

LEMME III,5.1

Supposons que :

- 1 - pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, L_{k+1}^+ et L_{k+1}^- admettent, relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, des espérances conditionnelles universelles, respectivement ${}^*M_{k+1}$ et ${}^*M_{k+1}$:

$$\left. \begin{array}{l} {}^*M_{k+1} \\ {}^*M_{k+1} \end{array} \right\} : (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^{k+1} \longrightarrow \bar{R}^+$$

on désigne par *M_0 et *M_0 les espérances de L_0^+ et L_0^- .

- 2 - pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, Y_{k+1} admet, relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, une probabilité conditionnelle universelle :

$$R^k : (Y, y)^{k+1} \times (U, u)^{k+1} \longrightarrow (Y, y)$$

on désigne par R^{-1} la probabilité $P.(Y_0)^{-1}$ sur (Y, y) image de P par Y_0 .

Considérons alors les fonctions réelles positives mesurables : ${}^*C_0, {}^*C_1, \dots, {}^*C_k, {}^*C_N$ et ${}^*C_0, {}^*C_1, \dots, {}^*C_k, \dots, {}^*C_N$ (qu'on peut appeler : « fonctions de Bellman ») :

$$\left. \begin{array}{l} {}^*C_k \\ {}^*C_k \end{array} \right\} : (Y, y)^k \times (U, u)^k \longrightarrow \bar{R}^+$$

définies, à partir d'une politique donnée $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k, \dots, \tilde{\gamma}_N$, par les équations de récurrence (équations de la programmation dynamique) :

$$\begin{aligned} {}^*C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) &= {}^*M_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ (III.5) \quad &+ \int_Y C_{k+1}^+ [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{\gamma}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ &R^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k) \end{aligned}$$

et

$$(III.5) \quad \begin{aligned} & {}^*C_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) = {}^*M_k (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ & + \int_{\mathcal{Y}} C_{k+1}^- [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}_{k+1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ & \quad R^{k-1} (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k) \end{aligned}$$

où $C_{N+1}^+ = 0$, $C_{N+1}^- = 0$ et pour $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$:

$$\begin{aligned} C_{k+1}^+ & \begin{cases} = +\infty & \text{si } {}^*C_{k+1} = +\infty \\ = ({}^*C_{k+1} - {}^*C_{k+1})^+ & \text{sinon} \end{cases} \\ C_{k+1}^- & \begin{cases} = +\infty & \text{si } {}^*C_{k+1} = +\infty \\ = ({}^*C_{k+1} - {}^*C_{k+1})^- & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, quel que soit $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et quelle que soit la politique d'horizon k (pour $k \geq 1$) :
 $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, si $\{ \alpha_1^{(y_1)}, \alpha_2^{(y_1, y_2)}, \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)} \}$ est le bouclage associé à $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, on a :

$$(III.7) \quad \begin{aligned} & {}^*C_k [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ & \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} {}^*J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \end{aligned}$$

et :

$$(III.8) \quad \begin{aligned} & {}^*C_k [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})}, \\ & \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} {}^*J_k (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

On montre les formules (III.7) et (III.8) par récurrence. Par définition même de l'espérance conditionnelle universelle, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et (si $k \geq 1$) toute politique d'horizon k : $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, on a :

$$\begin{aligned} & {}^*M_k [\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \\ & \alpha_1^{(y_1)}(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k^{(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}_0, \bar{y}_1^{(y_1)}, \dots, \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})})] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \bar{L}_k^{+} (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) / \bar{y}_{k-1}^{(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})} \right\} \end{aligned}$$

L'égalité (III.7) est donc au moins vraie pour $k = N$, quelle que soit la politique d'horizon $N : (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

De même, l'égalité (III.8) est au moins vraie pour $k = N$, quelle que soit la politique : $(y_1, y_2, \dots, y_N)$.

Supposons-les vraies pour $k+1$ quelle que soit la politique d'horizon $k+1 : (y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1})$. Alors, en prenant en particulier $y_{k+1} = \tilde{y}_{k+1}$, on a, par définition même de C_{k+1}^+ et J_{k+1}^+ :

$$\begin{aligned} & C_{k+1}^+ [\bar{y}_0, \bar{y}_1(y_1), \dots, \bar{y}_k(y_1, y_2, \dots, y_k), \\ & \quad \alpha_1(y_1)(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k(y_1, y_2, \dots, y_k)(\bar{y}_0, \bar{y}_1(y_1), \dots, \bar{y}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})), \\ & \quad \alpha_{k+1}(y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1})(\bar{y}_0, \bar{y}_1(y_1), \dots, \bar{y}_k(y_1, y_2, \dots, y_k))] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} J_{k+1}^+ (y_1, y_2, \dots, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) \end{aligned}$$

quelle que soit la politique d'horizon $k : (y_1, y_2, \dots, y_k)$. D'après le théorème V,3.2 du chapitre 2, l'équation (III.5) implique donc :

$$\begin{aligned} & {}^*C_k [\bar{y}_0, \bar{y}_1(y_1), \dots, \bar{y}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \\ & \quad \alpha_1(y_1)(\bar{y}_0), \dots, \alpha_k(y_1, y_2, \dots, y_k)(\bar{y}_0, \bar{y}_1(y_1), \dots, \bar{y}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}))] \\ & \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ \bar{L}_k^+(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) / \bar{y}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \right\} \\ & \quad E \left\{ J_{k+1}^+(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N) / \bar{y}_{k-1}(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \right\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément l'égalité (III.7) écrite pour k . De même, quelle que soit la politique d'horizon $k :$

$(y_1, y_2, \dots, y_k)$ on peut montrer à partir de l'équation (III.6) que l'égalité (III.8) est encore vraie pour k .

C.Q.F.D.

THÉORÈME III,5.2.

Supposons vérifiées les hypothèses 1) et 2) du lemme III,5.1. Supposons en outre que, pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ les fonctions *M_k et *M_k ne prennent que des valeurs finies (le processus de coût L_k est donc modéré).

Soit $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_2^1, \dots, \tilde{y}_N^1)$ une politique de poursuite. Soient $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_N^2$ des applications mesurables :

$$\chi_k^2 : (\mathcal{Y}, y)^k \times (\mathcal{U}, u)^{k-1} \times (\mathcal{U}_1, u_1) \longrightarrow (\mathcal{U}_2, u_2)$$

et $(\hat{y}_1^2, \hat{y}_2^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ la politique d'évasion obtenue en posant pour $k = 1, 2, \dots, N$ et

$$y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}, \quad u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U} :$$

$$\begin{aligned} & \hat{y}_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ & = \chi_k^2[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \end{aligned}$$

Soient ${}^*C_0, {}^*C_1, \dots, {}^*C_k, \dots, {}^*C_N$ et ${}^*C_0, {}^*C_1, \dots, {}^*C_k, \dots, {}^*C_N$ les fonctions construites, comme au lemme III,5.1, au moyen des équations récurrentes (de la programmation dynamique) (III.5) et (III.6) pour la politique :

$$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N) = \{ (\tilde{y}_1^1, \hat{y}_1^2), (\tilde{y}_2^1, \hat{y}_2^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2) \}$$

Supposons que, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$:

1 - *C_k et *C_k ne prennent jamais simultanément la valeur $+\infty$:

$$\left\{ (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{Y}^k \times \mathcal{U}^k : {}^*C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) = +\infty \right\} \\ \cap \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{Y}^k \times \mathcal{U}^k : {}^*C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) < +\infty \right\} = \emptyset$$

on peut donc toujours définir la fonction :

$$C_k = {}^*C_k - {}^*C_k$$

2 - les fonctions ${}^*\tilde{C}_k$ et ${}^*\tilde{C}_k$ définies sur $\mathcal{Y}^k \times \mathcal{U}^{k-1}$ en posant :

$${}^*\tilde{C}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ = {}^*C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]$$

et :

$${}^*\tilde{C}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ = {}^*C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]$$

sont à valeurs finies. Il est équivalent de dire que la fonction :

$$\tilde{C}_k = {}^*\tilde{C}_k - {}^*\tilde{C}_k$$

est à valeurs finies.

Si, de plus, pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$:

3 - l'application χ_k^2 vérifie la première inéquation de la programmation dynamique :

$$C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, u_k^2) \\ (III.9) \\ \leq C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$ et $u_k^1 \in \mathcal{U}_1$, $u_k^2 \in \mathcal{U}_2$

4 - la tactique de poursuite $\tilde{y}_k^1$ vérifie la deuxième inéquation de la programmation dynamique :

$$C_k\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}], \\ (III.10) \\ \chi_k^2[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}_k^1(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]\} \\ \leq C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathcal{Y}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathcal{U}$ et $u'_k \in \mathcal{U}_1$.

alors, dans ces conditions,

5 - toute politique d'évasion est admissible relativement à la politique de poursuite $(\tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2, \dots, \tilde{y}'_N)$, autrement dit, appartient à $\tilde{\mathcal{P}}^2_0(\tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2, \dots, \tilde{y}'_N)$.

6 - toute politique de poursuite est admissible, autrement dit, appartient à $\tilde{\mathcal{P}}^1_0$.

7 - la politique d'évasion $(\hat{y}^1_1, \hat{y}^2_2, \dots, \hat{y}^2_N)$ est conjuguée de la politique de poursuite $(\tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2, \dots, \tilde{y}'_N)$.

8 - la politique de poursuite $(\tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2, \dots, \tilde{y}'_N)$ est optimale.

(ces propriétés devant s'entendre au sens que nous leur avons donné en III,3).

REMARQUE III,5.3.

Pour pouvoir appliquer le théorème précédent il n'est pas nécessaire de calculer *C_k et ${}_*C_k$. Il suffit de savoir que ces deux fonctions ne sont pas simultanément infinies, de connaître leur différence

$C_k = {}^*C_k - {}_*C_k$ et de vérifier que $\tilde{C}_k$ défini par :

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ &= C_k[y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{y}'_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \end{aligned}$$

est toujours fini.

Supposons donc, qu'à l'instant $k+1$:

- ${}^*C_{k+1}$ et ${}_*C_{k+1}$ ne sont pas infinies simultanément
- on connaît $C_{k+1} = {}^*C_{k+1} - {}_*C_{k+1} = C_{k+1}^+ - C_{k+1}^-$
- $\tilde{C}_{k+1}$ n'est jamais infini

(conditions réalisées pour $k=N$)

Si les intégrales :

$$\int_{\mathcal{Y}} C_{k+1}^+ [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}'_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ \mathcal{R}^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k)$$

et

$$\int_{\mathcal{Y}} C_{k+1}^- [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}'_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ \mathcal{R}^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k)$$

ne sont pas simultanément infinies, alors :

- *C_k et ${}_*C_k$ ne sont pas simultanément infinies (car on a supposé *M_k et ${}_*M_k$ finis)
- on peut calculer C_k par la formule :

$$C_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) = M_k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ + \int_{\mathbb{Y}} C_{k+1} [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \tilde{y}_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ R^{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k; dy_k)$$

où : $M_k = {}^*M_k - {}_*M_k$

- il reste à vérifier que $\tilde{C}_k$ n'est jamais infini.

En procédant ainsi pas à pas depuis $k=N$ jusqu'à $k=0$, il sera possible de s'assurer que les hypothèses du théorème sont réunies, sans pour autant calculer explicitement *C_k et ${}_*C_k$, ni même *M_k et ${}_*M_k$.

DEMONSTRATION DU THEOREME III,5.2.

Soient $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$ et $(\bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2, \dots, \bar{\gamma}^N)$ une politique de poursuite et une politique d'évasion quelconques. Notons $(\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, \dots, \tilde{\gamma}^N)$ la politique d'évasion définie en posant pour

$$k = 1, 2, 3, \dots, N \text{ et } y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{Y}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{U} :$$

$$\tilde{\gamma}^k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$$

$$= \chi_k^2 [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \gamma^k(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]$$

(elle dépend évidemment de $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$).

D'après le lemme III,5.1, quel que soit $k = 1, 2, 3, \dots, N$:

- l'hypothèse 1) du théorème entraîne que les politiques partielles :

$$\{ (\tilde{\gamma}^1_k, \gamma^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N) \}$$

$$\{ (\tilde{\gamma}^1_k, \hat{\gamma}^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N) \}$$

$$\text{et } \{ (\gamma^1_k, \bar{\gamma}^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N) \}$$

sont admissibles à l'instant k (selon la définition donnée en III,4),

- les hypothèses 3) et 4) du théorème impliquent les inégalités :

$$J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{\gamma}^1_k, \gamma^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N)] \\ \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\tilde{\gamma}^1_k, \hat{\gamma}^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N)] \\ \leq_{p.s.} J_k [y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, (\gamma^1_k, \bar{\gamma}^2_k), (\tilde{\gamma}^1_{k+1}, \hat{\gamma}^2_{k+1}), (\tilde{\gamma}^1_{k+2}, \hat{\gamma}^2_{k+2}), \dots, (\tilde{\gamma}^1_N, \hat{\gamma}^2_N)]$$

quelle que soit la politique d'horizon $k-1$: $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$

- l'hypothèse 2) du théorème entraîne, pour toute politique d'horizon $k-1$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1})$:

$$P \{ {}^* \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \}$$

$$= P \{ {}_* \mathcal{N}_k [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), (\tilde{\gamma}_{k+1}^1, \hat{\gamma}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \} = 0$$

On peut donc appliquer le corollaire III,4.4, du lemme III,4.3, et en déduire que :

- les politiques partielles :

$$\begin{aligned} & \{ (\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2) \} \\ & \{ (\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2) \} \\ & \{ (\gamma_1^1, \bar{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \bar{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2) \} \end{aligned}$$

sont admissibles à l'instant 1,

- ces politiques partielles à l'instant 1 vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_1 [(\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq_{P.3.} J_1 [(\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \leq_{P.5.} J_1 [(\gamma_1^1, \bar{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \bar{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

Comme, d'après l'hypothèse 2) du théorème :

$$\begin{aligned} & P \{ {}^* \mathcal{N}_0 [(\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \} \\ & = P \{ {}_* \mathcal{N}_0 [(\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \} = 0 \end{aligned}$$

on peut alors appliquer (deux fois) le lemme III,4.2. On obtient ainsi les conclusions suivantes :

- les politiques :

$$\begin{aligned} & \{ (\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_k^1, \gamma_k^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2) \} \\ & \{ (\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_k^1, \hat{\gamma}_k^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2) \} \\ & \{ (\gamma_1^1, \bar{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \bar{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_k^1, \bar{\gamma}_k^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2) \} \end{aligned}$$

sont admissibles

- elles vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} & J_0 [(\tilde{\gamma}_1^1, \gamma_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \gamma_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \gamma_N^2)] \\ & \leq J_0 [(\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2)] \\ & \leq J_0 [(\gamma_1^1, \bar{\gamma}_1^2), (\gamma_2^1, \bar{\gamma}_2^2), \dots, (\gamma_N^1, \bar{\gamma}_N^2)] \end{aligned}$$

On a donc montré que, pour toute politique d'évasion $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2)$ et toute politique de poursuite $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_N^1)$ il existe une politique d'évasion $(\bar{\gamma}_1^2, \bar{\gamma}_2^2, \dots, \bar{\gamma}_N^2)$ telle que les deux conditions précédentes soient réalisées. Cela n'est rien d'autre que l'ensemble des conclusions 5), 6), 7) et 8) du théorème.

C.Q.F.D.

IV - OPTIMISATION DES « SYSTÈMES MARKOVIENS »

Nous reprenons ici le problème de jeu séquentiel étudié au paragraphe II, dans le cas d'un coût positif, et au paragraphe III, dans le cas d'un coût réel quelconque (rappelons que le problème d'optimisation ordinaire, étudié au paragraphe I, en est un cas particulier).

Nous nous plaçons toutefois dans l'hypothèse où le processus de coût $(L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, L_N)$ est construit à partir d'un « processus d'état » $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_N)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à commandes dans $(U, \mathcal{U})$ et à valeurs dans un espace mesurable $(X, \mathcal{X})$, en utilisant des fonctions réelles mesurables :

$$d_k : (X, \mathcal{X})^2 \times (U, \mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots, N$, et :

$$d_0 : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

et en posant :

$$\begin{aligned} L_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) \\ = d_k [X_{k-1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k), u_k] \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots, N$, et :

$$L_0(\omega) = d_0 [X_0(\omega)]$$

quels que soient $\omega \in \Omega$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in U$.

Cette construction est un cas particulier de celle envisagé en I.2. (formule (I.1)).

Nous dirons que le couple du processus d'état $\{X_k\}$ et du processus de coût $\{L_k\}$ constitue un *système markovien* si le processus de coût est construit comme il vient d'être indiqué, et si le processus d'état est un *processus markovien à commande* (conformément à la définition donnée au paragraphe VI du chapitre 2) c'est-à-dire s'il existe, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ une probabilité de transition :

$$Q^k : (X, \mathcal{X}) \times (U, \mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(X, \mathcal{X})$$

telle que, quel que soit le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ défini sur $(X, \mathcal{X})$ et à valeurs dans $(U, \mathcal{U})$, on ait, pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} Q^k [\bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}, \alpha_{k+1}(\bar{X}_0, \bar{X}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}) ; A] \\ \stackrel{\text{p.s.}}{=} E \left\{ 1_A [\bar{X}_{k+1}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1})}] / \bar{X}_0, \bar{X}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \right\} \end{aligned}$$

$\{ \bar{X}_0, \bar{X}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}, \dots \}$ étant le processus à commande bouclée, obtenu en posant :

$$\begin{cases} \bar{X}_0(\omega) = X_0(\omega) & \text{et pour } k = 1, 2, \dots, N : \\ \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}(\omega) = X_k[\omega, \alpha_1(\bar{X}_0(\omega)), \dots, \alpha_k(\bar{X}_0(\omega), \dots, \bar{X}_{k-1}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})}(\omega))] \end{cases}$$

quel que soit $\omega \in \Omega$.

La propriété, pour le système $\{X_k, L_k\}$ d'être markovien, prend tout son intérêt si l'état est *parfaitement observé*, c'est-à-dire si le processus d'observation $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_N)$ (auquel est

et $(\hat{\beta}_1^z, \hat{\beta}_2^z, \dots, \hat{\beta}_N^z)$ la politique d'évasion markovienne obtenue en posant :

$$\hat{\beta}_k^z(x_{k-1}) = \theta_k^z[x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1})]$$

pour tout $k=1, 2, 3, \dots, N$ et tout $x_{k-1} \in X$.

Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots, \Gamma_N$ les fonctions réelles positives mesurables définies sur $(X, \mathcal{X}) \times (U_1, \mathcal{U}_1)$ par l'équation de la programmation dynamique, où la fonction $M_k = {}^*M_k$ est définie par la première équation (IV.1) :

$$(IV.2) \quad \Gamma_k(x_{k-1}, u_k) = M_k(x_{k-1}, u_k) + \int_X \Gamma_{k+1}[x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1(x_k), \hat{\beta}_{k+1}^z(x_k)] Q^{k+1}(x_{k-1}, u_k; dx_k)$$

avec $\Gamma_{N+1} = 0$

Supposons que, pour tout $k=1, 2, 3, \dots, N$:

1 - l'application θ_k^z vérifie la première inéquation de la programmation dynamique :

$$(IV.3) \quad \Gamma_k(x_{k-1}, u_k^1, u_k^z) \leq \Gamma_k[x_{k-1}, u_k^1, \theta_k^z(x_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $x_{k-1} \in X$, $u_k^1 \in U_1$ et $u_k^z \in U_2$.

2 - l'application $\tilde{\beta}_k^1$ vérifie la deuxième inéquation de la programmation dynamique :

$$(IV.4) \quad \Gamma_k[x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \theta_k^z(x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}))] \leq \Gamma_k[x_k, u_k^1, \theta_k^z(x_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $x_{k-1} \in X$ et $u_k^1 \in U_1$.

Alors :

3 - la politique d'évasion $(\hat{\beta}_1^z, \hat{\beta}_2^z, \dots, \hat{\beta}_N^z)$ est conjuguée de la politique de poursuite $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ (parmi toutes les politiques d'évasion, markoviennes ou non).

4 - la politique de poursuite $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ est optimale (parmi toutes les politiques de poursuite, markoviennes ou non).

COROLLAIRE IV.2

Supposons que les fonctions *M_k et ${}_kM_k$, définies par les équations (IV.1), sont à valeurs finies, quel que soit $k=0, 1, 2, \dots, N$.

Soient $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ une politique de poursuite markovienne, $\theta_1^z, \theta_2^z, \dots, \theta_k^z, \dots, \theta_N^z$ des applications mesurables :

$$\theta_k^z : (X, \mathcal{X}) \times (U_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (U_2, \mathcal{U}_2)$$

et $(\hat{\beta}_1^z, \hat{\beta}_2^z, \dots, \hat{\beta}_N^z)$ la politique d'évasion markovienne obtenue en posant :

$$\hat{\beta}_k^z(x_{k-1}) = \theta_k^z[x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1})]$$

pour tout $k=1, 2, 3, \dots, N$ et tout $x_{k-1} \in X$.

Soient $^*\Gamma_0$ et $_*\Gamma_0$ les constantes, $^*\Gamma_1, ^*\Gamma_2, \dots, ^*\Gamma_k, \dots, ^*\Gamma_N$ et $_*\Gamma_1, _*\Gamma_2, \dots, _*\Gamma_k, \dots, _*\Gamma_N$ les fonctions réelles positives mesurables sur $(\mathbb{X}, \mathbb{X}) \times (\mathbb{U}, \mathbb{U})$, définies par les équations de la programmation dynamique :

$$(IV.5) \quad \begin{aligned} ^*\Gamma_k(x_{k-1}, u_k) &= ^*M_k(x_{k-1}, u_k) \\ &+ \int_{\mathbb{X}} \Gamma_{k+1}^+ [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1(x_k), \hat{\beta}_{k+1}^2(x_k)] Q^{k+1}(x_{k-1}, u_k; dx_k) \end{aligned}$$

et :

$$(IV.6) \quad \begin{aligned} _*\Gamma_k(x_{k-1}, u_k) &= _*M_k(x_{k-1}, u_k) \\ &+ \int_{\mathbb{X}} \Gamma_{k+1}^- [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1(x_k), \hat{\beta}_{k+1}^2(x_k)] Q^{k+1}(x_{k-1}, u_k; dx_k) \end{aligned}$$

avec $\Gamma_{N+1}^+ = 0$, $\Gamma_{N+1}^- = 0$ et pour $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$:

$$\Gamma_{k+1}^+ \begin{cases} = +\infty & \text{si } ^*\Gamma_{k+1} = +\infty \\ = (^*\Gamma_{k+1} - _*\Gamma_{k+1})^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{k+1}^- \begin{cases} = +\infty & \text{si } _*\Gamma_{k+1} = +\infty \\ = (^*\Gamma_{k+1} - _*\Gamma_{k+1})^- & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, N$

1 - $^*\Gamma_k$ et $_*\Gamma_k$ ne prennent jamais simultanément la valeur $+\infty$. On peut donc toujours définir la fonction :

$$\Gamma_k = ^*\Gamma_k - _*\Gamma_k$$

2 - $\tilde{\Gamma}_k$ définie en posant, pour tout $x_{k-1} \in \mathbb{X}$:

$$\tilde{\Gamma}_k(x_{k-1}) = \Gamma_k[x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \hat{\beta}_k^2(x_{k-1})]$$

ne prend jamais la valeur $+\infty$.

Si, de plus, pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$

3 - l'application Θ_k^2 vérifie la première inéquation de la programmation dynamique :

$$(IV.7) \quad \Gamma_k(x_{k-1}, u_k^1, u_k^2) \leq \Gamma_k[x_{k-1}, u_k^1, \Theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $x_{k-1} \in \mathbb{X}$, $u_k^1 \in \mathbb{U}_1$ et $u_k^2 \in \mathbb{U}_2$.

4 - l'application $\tilde{\beta}_k^1$ vérifie la deuxième inéquation de la programmation dynamique :

$$(IV.8) \quad \begin{aligned} &\Gamma_k[x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \Theta_k^2(x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}))] \\ &\leq \Gamma_k[x_{k-1}, u_k^1, \Theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

quels que soient $x_{k-1} \in \mathbb{X}$ et $u_k^1 \in \mathbb{U}_1$.

alors :

- 5 - toute politique d'évasion (markovienne ou non) est admissible relativement à $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$
- 6 - toute politique de poursuite (markovienne ou non) est admissible
- 7 - la politique d'évasion $(\hat{\beta}_1^1, \hat{\beta}_1^1, \dots, \hat{\beta}_N^1)$ est conjuguée de $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ (parmi toutes les politiques d'évasion, markoviennes ou non)
- 8 - la politique de poursuite $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ est optimale (parmi toutes les politiques de poursuite, markoviennes ou non).

*

* *

On peut se demander si, pour les systèmes markoviens, les théorèmes II,3.1, ou III,5.2, ne sont pas quand même « plus intéressants » que les corollaires IV,1 ou IV,2, c'est-à-dire s'il ne peut pas exister des politiques non markoviennes vérifiant les théorèmes II,3.1 ou III,5.2, sans qu'il existe pour autant une politique markovienne vérifiant les corollaires IV,1 ou IV,2. La réponse est donnée par le théorème suivant.

THÉOREME IV,3

Dans le cas du système markovien à observation parfaite considéré ici, s'il existe une politique de poursuite $(\tilde{\gamma}_1^1, \tilde{\gamma}_1^1, \dots, \tilde{\gamma}_N^1)$ et une politique d'évasion $(\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1)$ pour lesquelles les hypothèses du théorème II,3.1 (respectivement du théorème III,5.2) soient vérifiées, alors il existe une politique de poursuite markovienne $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ et une politique d'évasion markovienne $(\hat{\beta}_1^1, \hat{\beta}_1^1, \dots, \hat{\beta}_N^1)$ pour lesquelles les hypothèses du corollaire IV,1 (respectivement du corollaire IV,2) sont vérifiées.

DÉMONSTRATION

Première Partie

Supposons donc les hypothèses du théorème II,3.1 vérifiées pour $\{(\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^1), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^1)\}$. Soient

$$\chi_k^1, \chi_k^2, \dots, \chi_k^N \quad \text{les applications mesurables} \quad : \\ \chi_k^1 : (\mathbb{X}, \mathbb{X})^k \times (\mathbb{L}_1, \mathbb{U})^{k-1} \times (\mathbb{L}_1, \mathbb{U}_1) \longrightarrow (\mathbb{L}_2, \mathbb{U}_2)$$

utilisées dans ce théorème pour construire $\hat{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^1, \dots, \hat{\gamma}_N^1$ en posant :

$$\hat{\gamma}_k^1(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = \chi_k^1[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \hat{\gamma}_k^1(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})]$$

Choisissons alors arbitrairement $N-1$ points dans $\mathbb{X}$, soient $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-2}$ et $N-1$ points dans $\mathbb{L}_1$, soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N-1}$. Pour tout $k = 1, 2, \dots, N-1$, on désignera par ε_k^1 et ε_k^2 les composantes de ε_k suivant $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$.

On définit alors une politique markovienne : $\{(\tilde{\beta}_1^1, \hat{\beta}_1^1), (\tilde{\beta}_2^1, \hat{\beta}_2^1), \dots, (\tilde{\beta}_N^1, \hat{\beta}_N^1)\}$ en posant, pour tout $k = 1, 2, 3, \dots, N$ et tout $x_{k-1} \in \mathbb{X}$:

$$\tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}) = \tilde{\gamma}_k^1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1})$$

$$\hat{\beta}_k^2(x_{k-1}) = \hat{\gamma}_k^2(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1})$$

Si on désigne par $\theta_k^1, \theta_k^2, \dots, \theta_k^N$ les applications mesurables :

$$\theta_k^1 : (\mathbb{X}, \mathbb{X}) \times (\mathbb{L}_1, \mathbb{U}_1) \longrightarrow (\mathbb{L}_2, \mathbb{U}_2)$$

construites en posant pour tout $x_{k-1} \in \mathbb{X}$ et tout $u_k^1 \in \mathbb{L}_1$:

$$\theta_k^1(x_{k-1}, u_k^1) = \chi_k^1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}, u_k^1)$$

il est clair que l'on a :

$$\hat{\beta}_k^2 (x_{k-1}) = \theta_k^2 [x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1 (x_{k-1})]$$

quels que soient $k = 1, 2, 3, \dots, N$, $x_{k-1} \in \mathbb{X}$

Soient $C_1, C_2, \dots, C_N$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ les fonctions réelles positives mesurables construites respectivement au théorème II,3.1 et au corollaire IV,1 (équations (II.5) et (IV.2)).

Supposons qu'à l'instant $k+1 \leq N+1$, on ait pour tous $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$ et $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{U}$:

$$(IV.9) \quad \begin{aligned} & C_{k+1} [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k, \\ & \tilde{\gamma}_{k+1}^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \hat{\gamma}_{k+1}^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ & = \Gamma_{k+1} [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1 (x_k), \hat{\beta}_{k+1}^2 (x_k)] \end{aligned}$$

Cette égalité est évidemment vérifiée pour $k = N$ puisque $C_{N+1} = \Gamma_{N+1} = 0$.

Si (IV.9) est vraie, alors, d'après (II.5), quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{U}$

$$\begin{aligned} & C_k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k] = M_k (x_{k-1}, u_k) \\ & + \int_{\mathbb{X}} \Gamma_{k+1} [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1 (x_k), \hat{\beta}_{k+1}^2 (x_k)] Q^{k+1} (x_{k-1}, u_k; dx_k) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (IV.2) :

$$(IV.10) \quad C_k [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k] = \Gamma_k (x_{k-1}, u_k)$$

Les deux inégalités (II.6) et (II.7) du théorème II,3.1 s'écrivent par suite :

$$(IV.11) \quad \begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, u_k^2] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

et

$$(IV.12) \quad \begin{aligned} & \Gamma_k \{ x_{k-1}, \tilde{\gamma}_k^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ & \chi_k^2 [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, \tilde{\gamma}_k^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \} \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{U}$, $u_k^1 \in \mathbb{U}_1$, $u_k^2 \in \mathbb{U}_2$

De l'inégalité (IV.11) on déduit en particulier :

$$\Gamma_k (x_{k-1}, u_k^1, u_k^2) \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}, u_k^1)]$$

c'est-à-dire :

$$(IV.13) \quad \Gamma_k (x_{k-1}, u_k^1, u_k^2) \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $x_{k-1} \in X$, $u_k^1 \in U_1$, $u_k^2 \in U_2$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

Or, toujours d'après l'inégalité (IV.11), l'inégalité contraire est aussi vraie, donc :

$$(IV.14) \quad \begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \\ & = \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in U$, $u_k^1 \in U_1$

D'après l'inégalité (IV.12), on a en particulier :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, \tilde{y}_k^1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}), \\ & \quad \hat{y}_k^2(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1})] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}, x_{k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (IV.14) :

$$(IV.15) \quad \Gamma_k [x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \hat{\beta}_k^2(x_{k-1})] \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \theta_k^2(x_{k-1}, u_k^1)]$$

quels que soient $x_{k-1} \in X$, $u_k^1 \in U_1$.

On en déduit, d'après (IV.14) :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \hat{\beta}_k^2(x_{k-1})] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, u_k^1, \chi_k^2(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

pour tout $u_k^1 \in U_1$, et en particulier :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1}, \tilde{\beta}_k^1(x_{k-1}), \hat{\beta}_k^2(x_{k-1})] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1}, \tilde{y}_k^1(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ & \quad \hat{y}_k^2(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \end{aligned}$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in U$.

Or l'inégalité (IV.12) s'écrit, en utilisant (IV.14) :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1} , \tilde{\gamma}_k^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ & \quad \hat{\gamma}_k^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1} , u_k^1 , \theta_k^2 (x_{k-1}, u_k^1)] \end{aligned}$$

et en particulier :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1} , \tilde{\gamma}_k^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ & \quad \hat{\gamma}_k^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \\ & \leq \Gamma_k [x_{k-1} , \tilde{\beta}_k^1 (x_{k-1}) , \hat{\beta}_k^2 (x_{k-1})] \end{aligned}$$

d'où, puisque l'on vient d'obtenir l'inégalité contraire :

$$\begin{aligned} & \Gamma_k [x_{k-1} , \tilde{\gamma}_k^1 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), \\ (IV.16) \quad & \quad \hat{\gamma}_k^2 (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1})] \\ & = \Gamma_k [x_{k-1} , \tilde{\beta}_k^1 (x_{k-1}) , \hat{\beta}_k^2 (x_{k-1})] \end{aligned}$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \in U$.

Or, d'après (IV.10), cette relation (IV.16) n'est autre que la relation (IV.9) écrite à l'instant k . Comme (IV.9) est vérifiée à l'instant $N+1$, elle l'est à tout instant $k = N, N-1, \dots, 2, 1$ et il en est de même des relations (IV.10), (IV.13), (IV.14) et (IV.15). Mais les relations (IV.13) et (IV.15) ne sont en fait que les relations (IV.3) et (IV.4), et par suite les hypothèses du corollaire IV.1 sont bien vérifiées pour la politique markovienne : $\{ (\tilde{\beta}_1^1, \hat{\beta}_1^2), (\tilde{\beta}_2^1, \hat{\beta}_2^2), \dots, (\tilde{\beta}_N^1, \hat{\beta}_N^2) \}$.

Deuxième Partie

Dans le cas où ce sont les hypothèses du théorème III.5.2 qui sont vérifiées pour $\{ (\tilde{\gamma}_1^1, \hat{\gamma}_1^2), (\tilde{\gamma}_2^1, \hat{\gamma}_2^2), \dots, (\tilde{\gamma}_N^1, \hat{\gamma}_N^2) \}$, on procède de façon quasiment identique : on construit de la même façon $\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_k^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1$, $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_k^2, \dots, \theta_N^2$ et $\hat{\beta}_1^2, \hat{\beta}_2^2, \dots, \hat{\beta}_k^2, \dots, \hat{\beta}_N^2$. On considère, pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ les fonctions *C_k et ${}_*C_k$ d'une part, ${}^*\Gamma_k$ et ${}_*\Gamma_k$ d'autre part, définies respectivement par les équations (III.5) et (III.6) du lemme III.5.1 et (IV.5) et (IV.6) du corollaire IV.2. Par hypothèse, à tout instant k , *C_k et ${}_*C_k$ ne sont pas simultanément infinis et on peut définir :

$$C_k = {}^*C_k - {}_*C_k$$

Supposons qu'à l'instant $k+1$, ${}^*\Gamma_{k+1}$ et ${}_*\Gamma_{k+1}$ ne sont pas simultanément infinis, de sorte qu'on peut définir :

$$\Gamma_{k+1} = {}^*\Gamma_{k+1} - {}_*\Gamma_{k+1}$$

Supposons de plus que :

$$\begin{aligned} & C_{k+1} [x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k \\ (IV.17) \quad & \quad \tilde{\gamma}_{k+1}^1 (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k), \hat{\gamma}_{k+1}^2 (x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k)] \\ & = \Gamma_{k+1} [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1 (x_k), \hat{\beta}_{k+1}^2 (x_k)] \end{aligned}$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_k \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ ce qui implique en particulier que $\tilde{\Gamma}_{k+1}$, définie par :

$$\tilde{\Gamma}_{k+1}(x_k) = \Gamma_{k+1} [x_k, \tilde{\beta}_{k+1}^1(x_k), \tilde{\beta}_{k+1}^2(x_k)]$$

n'est jamais infinie, d'après l'hypothèse 2) du théorème III.5.2.

L'égalité (IV.17) est au moins vraie pour $k=N$, puisque $\Gamma_{N+1} = C_{N+1} = 0$

On déduit immédiatement de (IV.17) que :

$${}^*C_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) = {}^*\Gamma_k(x_{k-1}, u_k)$$

$${}_kC_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) = {}_k\Gamma_k(x_{k-1}, u_k)$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in U$.

Par suite, ${}^*\Gamma_k$ et ${}_k\Gamma_k$ ne sont pas simultanément infinis, on peut définir :

$$\Gamma_k = {}^*\Gamma_k - {}_k\Gamma_k$$

et on a la relation :

$$(IV.18) \quad C_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k) = \Gamma_k(x_{k-1}, u_k)$$

quels que soient $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} \in X$, $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k \in U$.

On achève alors la démonstration comme dans la première partie en faisant jouer aux relations (IV.17) et (IV.18) le rôle des relations (IV.9) et (IV.10) et en utilisant les inégalités (III.9) et (III.10) du théorème III.5.2. au lieu des inégalités (II.6) et (II.7) du théorème II.3.1.

C.Q.F.D.



Chapitre 6

EXEMPLES CLASSIQUES

I - EXEMPLE DE PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE : PROCESSUS DE KALMAN

Dans ce paragraphe, nous présentons l'exemple qui nous servira à illustrer, au paragraphe II les résultats théoriques du chapitre 4, au paragraphe III, ceux du chapitre 5.

I,1. Définition des processus de Kalman

Nous nous plaçons ici dans le cadre des processus aléatoires à commande définis par une équation récurrente « d'évolution » et une équation récurrente « d'observation ». Les hypothèses précises ayant été déjà données aux alinéas I,2 et I,3 du chapitre 2 et au paragraphe VI du chapitre 4, rappelons seulement brièvement que l'on se donne deux processus aléatoires $V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ (bruit d'évolution) et $W_0, W_1, \dots, W_k, \dots$ (bruit d'observation) définis sur leur espace de probabilité canonique, et que l'on construit deux processus aléatoires à commande $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ (processus d'état) et $Y_0, Y_1, \dots, Y_k, \dots$ (processus d'observation) par les formules :

$$\begin{cases} X_k = f_k (X_{k-1}, u_k, v_k) \\ Y_k = h_k (X_k, Y_{k-1}, u_k, w_k) \end{cases}$$

à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} X_0 = f_0 (v_0) \\ Y_0 = h_0 (X_0, w_0) \end{cases}$$

En plus des hypothèses du paragraphe VI du chapitre 4, nous supposons ici *tous les espaces de dimension finie*, les applications f_k et h_k affines respectivement par rapport à x_{k-1} et v_k et par rapport à x_k et w_k , le processus de bruit $(V_0, W_0), (V_1, W_1), \dots, (V_k, W_k)$ sans mémoire et les variables aléatoires V_k et W_k gaussiennes normalisées.

Plus précisément, nous supposons que :

$$\begin{aligned} 1 - \quad \mathcal{U} &= \mathbb{R}^m \\ \mathcal{Y} &= \mathcal{W} = \mathbb{R}^n \\ \mathcal{X} &= \mathbb{R}^p \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

et nous prenons pour mesures λ, μ, ν sur $\mathcal{Y}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$ les mesures de Lebesgue à n, q, n dimensions.

2 - f_k est de la forme :

$$f_k (x, u, v) = F_k (u) \cdot x + g_k (u) + A_k (u) \cdot v$$

où F_k, g_k, A_k sont des applications mesurables définies sur $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ et f_0 est de la forme :

$$f_0 (v) = g_0 + A_0 \cdot v$$

où $g_0 \in \mathcal{X}, A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$

3 - h_k est de la forme :

$$h_k (x, y, u, w) = H_k (y, u) \cdot x + B_k (y, u) \cdot w$$

où H_k et B_k sont des applications mesurables de $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$, et où $B_k(y, u)$ est inversible quel que soient $y \in \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{U}$ (rappelons que $\mathcal{W} = \mathcal{Y}$); h_0 est de la forme :

$$h_0(x, w) = H_0 \cdot x + B_0 \cdot w$$

où $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$ et B_0 est inversible.

- 4 - le processus aléatoire $(V_0, W_0), (V_1, W_1), \dots, (V_k, W_k), \dots$ est sans mémoire (c'est-à-dire (V_k, W_k) est indépendant de (V_j, W_j) si $k \neq j$) et les densités de probabilité ℓ_k des couples (V_k, W_k) par rapport à la mesure de Lebesgue à $q+n$ dimension $\mu \otimes \nu$, sont gaussiennes normalisées :

$$\ell_k(v_k, w_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{q+n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\|v_k\|^2 + \|w_k\|^2 \right) \right\}$$

$\| \cdot \|$ désignant la norme euclidienne.

Les équations d'évolution et d'observation s'écrivent donc ici :

$$(I.1) \quad \begin{cases} X_k = F_k(u_k) \cdot X_{k-1} + g_k(u_k) + A_k(u_k) \cdot v_k \\ Y_k = H_k(Y_{k-1}, u_k) \cdot X_k + B_k(Y_{k-1}, u_k) \cdot w_k \end{cases}$$

avec pour conditions initiales :

$$\begin{cases} X_0 = g_0 + A_0 \cdot v_0 \\ Y_0 = H_0 \cdot X_0 + B_0 \cdot w_0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où F_k, A_k, H_k et B_k sont des applications constantes, et où g_k est linéaire en u , on retrouve un système très classique. D'abord étudié, sans commande, sous l'aspect du filtrage, par Kalman [17] (et Kalman et Bucy [18] en temps continu), puis, avec commande, par Florentin [12] (et Wonham [28] en temps continu), ce système a, depuis, été reconsidéré par de nombreux auteurs. Les résultats présentés aux paragraphes II et III ne sont donc pas à proprement parler nouveaux.

Mais, d'une part, il était intéressant de vérifier sur un exemple que la théorie des chapitres précédents permet de retrouver des résultats connus, obtenus par des méthodes moins générales (mais aussi, parfois, moins rigoureuses). Cet exemple a été choisi parce que, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est l'un des rares pour lesquels il est possible de montrer et d'énoncer sous forme analytique des résultats complets et directement utilisables.

D'autre part, nos résultats présentent quand même, par rapport aux résultats classiques, un gain en généralité non négligeable (voir alinéas II,1 et III,1 pour les détails).



Désormais, nous appellerons les processus aléatoires à commande : $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ définis par les équations (I,1) respectivement processus d'état et processus d'observation de Kalman.

1.2. Notations

Nous adopterons par la suite les notations matricielles classiques :

- + un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté comme une matrice à 1 colonne et n lignes
- le transposé d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ (qui appartient au dual de $\mathbb{R}^n$) est désigné par X' et noté comme une matrice à 1 ligne et n colonnes

- une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$) est noté comme une matrice à n colonnes et p lignes
- la transposée d'une application linéaire A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est désignée par A' et notée comme une matrice à n lignes et p colonnes.

Nous désignerons par I_n l'unité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et 0_p^n le zéro de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Si A est un opérateur symétrique appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ on posera, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_A^2 = x' \cdot A \cdot x$$

Nous utiliserons par ailleurs, en vue de condenser l'écriture, les notations suivantes :

$$v^k = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_k \end{pmatrix} \quad v^k \text{ est donc un vecteur de } W^{k+1} = \mathbb{R}^{(k+1)q}$$

$$y^k = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} \quad y^k \text{ est donc un vecteur de } Y^{k+1} = \mathbb{R}^{(k+1)n}$$

$$u^k = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} \quad u^k \text{ est donc un vecteur de } U^k = \mathbb{R}^{km}$$

Lorsque, dans une même formule, interviendront, d'une part v_{j-1} ou v^{j-1} (respectivement y_{j-1} ou y^{j-1} et u_j ou u^j) et d'autre part v^k (respectivement y^k et u^k) avec $k \geq j$, nous supposerons toujours que la j -ième ou les j premières composantes de v^k (respectivement de y^k et u^k) sont identiques à v_{j-1} ou v^{j-1} (respectivement à y_{j-1} ou y^{j-1} et à u_j ou u^j).



II - EXEMPLE DE CALCUL DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES UNIVERSELLES : ÉQUATIONS DE KALMAN

II,1. Introduction

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de calculer, en utilisant les méthodes du chapitre 4, une suite régulière de probabilités conditionnelles par rapport au processus aléatoire à commande $\{Y_k\}$ défini au paragraphe I (formules (I,1)). Nous en déduirons des probabilités conditionnelles universelles pour la variable d'état X_k et la variable d'observation Y_k par rapport à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ et nous montrerons que les équations de Kalman peuvent être utilisées pour calculer des espérances conditionnelles universelles pour des formes linéaires ou quadratiques en X_k ou Y_k .

L'extension des équations de Kalman, initialement montrées pour des processus aléatoires ordinaires, au cas des processus avec commande, a déjà été faite correctement dans le cas «classique», où F_k, A_k, H_k et B_k sont constants et g_k linéaire, par Striebel [26] en utilisant des formules analogues à celles du théorème VI,2.1 du chapitre 4, et dans le cas du temps continu, par Wonham [29 et 30] (la même méthode peut être employée en temps discret). Mais Striebel [26] obtient directement une suite de probabilités conditionnelles universelles pour X_k , sans construire de suite régulière de probabilité conditionnelles.

Quant à la méthode de Wonham ([29] chap. 4, paragraphe 4 et [30] chap. V), qui semble la plus élégante, elle n'est applicable que si F_k, A_k, H_k et B_k ne sont pas fonction de u_k ou y_{k-1} . Elle utilise en effet la technique de décomposition linéaire suivante, pour se ramener à des processus aléatoires ordinaires. On écrit les processus aléatoires à commande $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ définis par le système (I,1) sous la forme :

$$\text{et : } \begin{cases} X_k = X_k^* + \xi_k \\ Y_k = H_k X_k^* + \eta_k \end{cases}$$

$$\text{où : } \begin{cases} X_k^* = F_k \cdot X_{k-1}^* + g_k(u_k) \\ \xi_k = F_k \cdot \xi_{k-1} + A_k v_k \\ \eta_k = H_k \cdot \xi_k + B_k w_k \end{cases}$$

avec pour conditions initiales :

$$\begin{cases} X_0^* = g_0 \\ \xi_0 = A_0 \cdot v_0 \end{cases}$$

On montre alors facilement par récurrence que, quel que soit le bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ (défini sur $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ et à valeurs dans $(L\mathcal{H}, \mathcal{U})$) :

- 1 - $\overline{X_k^*}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$ est mesurable par rapport à la σ -algèbre engendrée par $\overline{Y_0}, \overline{Y_1}^{(\alpha_1)}, \dots, \overline{Y_k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$
- 2 - $\overline{Y_0}, \overline{Y_1}^{(\alpha_1)}, \dots, \overline{Y_k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$ engendrent la même σ -algèbre que $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k$.

$\{\xi_k\}$ et $\{\eta_k\}$ étant des processus aléatoires ordinaires, l'emploi des formules de Kalman ne pose pas de problème, et permet de calculer par exemple des représentants des espérances conditionnelles :

$$\text{ou : } E \left\{ \xi_k / \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1} \right\}$$

$$E \left\{ \xi_k' \cdot A \cdot \xi_k / \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1} \right\}$$

(ξ_k' étant le transposé de ξ_k et A un opérateur symétrique appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$) et par suite de calculer, pour tout bouclage $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, des représentants des espérances conditionnelles :

$$E \left\{ \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} / \bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})} \right\} \\ = E \left\{ \xi_k / \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1} \right\} + \bar{X}_k^*^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$$

ou :

$$E \left\{ \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}' \cdot A \cdot \bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} / \bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})} \right\} \\ = E \left\{ \xi_k' \cdot A \cdot \xi_k / \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1} \right\} \\ + 2 \bar{X}_k^*^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}' \cdot A \cdot E \left\{ \xi_k / \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1} \right\} \\ + \bar{X}_k^*^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}' \cdot A \cdot \bar{X}_k^*^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$$

Comme on peut le constater, cette méthode est inutilisable dans le cas général traité ici.

Remarquons qu'il peut très bien se produire en pratique que F_k , A_k , H_k ou B_k dépendent de u_k ou y_{k-1} . Supposons par exemple que l'équation d'observation s'écrive :

$$Y_k = X_k \cdot Y_{k-1} + W_k$$

X_k prenant ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y})$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$. H_k est donc ici une fonction linéaire de y_{k-1} . Or, calculer l'espérance conditionnelle de $\bar{X}_k^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$ par rapport aux observations $\bar{Y}_0, \bar{Y}_1^{(\alpha_1)}, \dots, \bar{Y}_{k-1}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})}$ c'est, en un certain sens, identifier le « système linéaire » précédent (pour un bouclage donné $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$) observant parfaitement son « état » Y_j et sachant que l'évolution de X_k est régie par la première équation de (I.1).

II.2. Calcul d'une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus d'observation de Kalman

D'après les théorèmes IV,3.1 ou IV,3.2 du chapitre 4 (suivant que l'horizon est fini ou infini), pour savoir calculer une suite régulière de probabilités conditionnelles associée au processus d'observation $\{Y_k; k=0, 1, \dots\}$ décrit au paragraphe I, il suffit de connaître les applications $\{\tilde{W}_k; k=0, 1, 2, \dots\}$ et les densités de probabilité conditionnelles $\{p_k^j; k=0, 1, 2, \dots; j=0, 1, \dots, k\}$ définies aux alinéas IV.1 et IV.2 du chapitre 4 (formules (IV.1) d'une part, (IV.2), (IV.3), (IV.4) d'autre part). D'après le lemme V.1 du chapitre 4, le calcul des $\{p_k^j\}$ se ramène en fait à celui des $\{p_j^j\}$.

Pour pouvoir effectuer plus commodément ces calculs nous adopterons les notations suivantes :

1 - nous désignerons par Φ_k l'application mesurable :

$$\Phi_k : \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}^{k+1}, \mathbb{X})$$

définie par :

$$(II.1) \quad \Phi_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = (F_k(u_k), F_{k-1}(u_{k-1}), \dots, F_1(u_1), A_0, \dots, F_k(u_k), A_{k-1}(u_{k-1}), A_k(u_k))$$

2 - nous désignerons encore par Ψ_k l'application mesurable :

$$\Psi_k : \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathbb{X}$$

définie par :

$$(II.2) \quad \Psi_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = g_k(u_k) + \sum_{j=0}^{k-1} F_k(u_k) \cdot F_{k-1}(u_{k-1}) \cdot \dots \cdot F_{j+1}(u_{j+1}) \cdot g_j(u_j)$$

Il est clair que, pour tout $k \geq 0$:

$$X_k(v^k, u^k) = \sum_{j=0}^{k-1} F_k(u_k) \cdot \dots \cdot F_{j+1}(u_{j+1}) \cdot [A_j(u_j) \cdot v_j + g_j(u_j)] + A_k(u_k) \cdot v_k + g_k(u_k)$$

c'est-à-dire :

$$X_k(v^k, u^k) = \Phi_k(u^k) \cdot v^k + \Psi_k(u^k)$$

3 - nous désignerons enfin par Θ_k et ρ_k les applications mesurables :

$$\begin{aligned}\Theta_k &: \mathcal{V} \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}^{k+1}, \mathcal{W}) \\ \rho_k &: \mathcal{V}^2 \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{W}\end{aligned}$$

définies par :

$$(II.3) \quad \begin{aligned}\Theta_k(y_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1} H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \Phi_k(u_1, u_2, \dots, u_k)\end{aligned}$$

$$(II.4) \quad \begin{aligned}\rho_k(y_{k-1}, y_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1} [y_k - H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \Psi_k(u_1, u_2, \dots, u_k)]\end{aligned}$$

L'application partielle : $h_k(x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot)$ admet pour application inverse : $W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k, \cdot)$ qui s'écrit ici :

$$W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k) = [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1} [y_k - H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot x_k]$$

On constate que W_k^* est mesurable de ses quatre arguments, et admet pour dérivée (de Fréchet) par rapport à y_k : $[B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1}$.

D'après la remarque VI.1.1 du paragraphe VI du chapitre 4, la mesure $\nu W_k^*(x_k, y_{k-1}, u_k; \cdot)$ sur $\mathcal{V}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ et sa dérivée de Radon Nicodým vaut :

$$\frac{\partial \nu W_k^*}{\partial \lambda}(x_k, y_{k-1}, u_k, y_k) = |\det \{ [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1} \}|$$

Par suite, les applications $\tilde{W}_k$ définies à l'alinéa IV.1 du chapitre 4 s'écrivent ici (d'après la formule (VI.1) du paragraphe VI du chapitre 4) :

$$\begin{aligned}\tilde{W}_k(v^k, y^k, u^k) \\ = W_k^* [X_k(v^k, u^k), y_{k-1}, u_k, y_k] \\ = \rho_k(y_{k-1}, y_k, u^k) - \Theta_k(y_{k-1}, u^k) \cdot v^k\end{aligned}$$

et les dérivées de Radon Nicodým des mesures $\nu \tilde{W}_k$ par rapport à λ (d'après la formule (VI.2) du chapitre 4) :

$$\frac{\partial \nu \tilde{W}_k}{\partial \lambda}(v^k, y^k, u^k) = |\det \{ [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1} \}|$$

Quant aux densités de probabilité conditionnelles $\{p_k^k; k=0, 1, 2, \dots\}$, le théorème suivant indique comment on peut les obtenir :

THEOREME II.2.1

Dans le cas particulier étudié ici, les densités de probabilité conditionnelles $\{p_k^k; k=0, 1, 2, \dots\}$ (définies au chap. 4, alinéa IV.2) sont de la forme :

$$\begin{aligned}p_k^k(v^k, y^k, u^k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{(k+1)q} |\det \Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)|^{\frac{1}{2}}} \\ \times \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v^k - \tilde{V}^k(y^k, u^k)\|^2 [\Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)]^{-1} \right\}\end{aligned}$$

où Σ_k^k est une application mesurable :

$$\Sigma_k^k: \mathcal{V}^k \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}^{k+1}, \mathcal{V}^{k+1})$$

à valeurs strictement définies positives et définie par l'équation de récurrence :

$$[\Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)]^{-1} = \begin{pmatrix} [\Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} & \mathcal{O}_{kq}^q \\ \mathcal{O}_q^{kq} & \mathbb{I}_q \end{pmatrix} + \Theta_k'(y_{k-1}, u^k) \cdot \Theta_k(y_{k-1}, u^k)$$

à partir de la condition initiale :

$$(\Sigma^0)^{-1} = \mathbb{I}_q + \Theta_0' \cdot \Theta_0 = \mathbb{I}_q + A_0' \cdot H_0' \cdot (B_0 \cdot B_0')^{-1} \cdot H_0 \cdot A_0$$

et où $\tilde{V}^k$ est une application mesurable :

$$\tilde{V}^k : \mathbb{V}^{k+1} \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathbb{V}^{k+1}$$

définie par l'équation de récurrence :

$$\tilde{V}^k(y^k, u^k) = \Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} [\Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} \tilde{V}^{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1}) \\ \mathcal{O}_q^1 \end{pmatrix} + \Theta_k'(y_{k-1}, u^k) \cdot \rho_k(y_{k-1}, y_k, u^k) \right\}$$

à partir de la condition initiale :

$$\tilde{V}^0(y_0) = \Sigma^0 \cdot \Theta_0' \cdot \rho_0(y_0) = \Sigma^0 \cdot A_0' \cdot H_0' \cdot (B_0 \cdot B_0')^{-1} \cdot (y_0 - H_0 g_0)$$

(Θ_k et ρ_k étant définies par les formules (II.1), (II.2), (II.3) et (II.4)).

DEMONSTRATION :

Supposons d'abord que le théorème est vrai pour $k-1$, c'est-à-dire que p_{k-1}^{k-1} est de la forme :

$$p_{k-1}^{k-1}(v^{k-1}, y^{k-1}, u^{k-1}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{kq} |\det \Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})|^{\frac{1}{2}}} \times \exp - \frac{1}{2} \left\{ \|v^{k-1} - \tilde{V}^{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1})\|^2 [\Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} \right\}$$

D'après le lemme V.1 du chapitre 4, la fonction ϖ_k^k utilisée à l'alinéa IV.2 du chapitre 4 pour construire p_k^k , s'écrit alors (formule (V.5) du chapitre 4) :

$$\begin{aligned} \varpi_k^k(v^k, y^k, u^k) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{kq} (\sqrt{2\pi})^{q+n} |\det \Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})|^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \exp - \frac{1}{2} \left\{ \|v^{k-1} - \tilde{V}^{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1})\|^2 [\Sigma_{k-1}^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \|v_k\|^2 + \|\rho_k(y_{k-1}, y_k, u^k) - \Theta_k(y_{k-1}, u^k) \cdot v^k\|^2 \right\} \\ &\times |\det [B_k(y_{k-1}, u_k)]^{-1}| \end{aligned}$$

On constate aisément que ω_k^k peut se mettre sous la forme :

$$\omega_k^k (v^k, y^k, u^k) = \epsilon_k (y^k, u^k) \times \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v^k - \tilde{V}^k(y^k, u^k)\|^2 [\Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)]^{-1} \right\}$$

où ϵ_k est une fonction réelle strictement positive mesurable définie sur $\mathcal{Y}^{k+1} \times \mathcal{U}^k$.

On en déduit immédiatement la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\mathcal{V}^{k+1}} \omega_k^k (v^k, y^k, u^k) \mu^{k+1} (dv^k) = (\sqrt{2\pi})^{(k+1)q} | \det \Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k) |^{\frac{1}{2}} \epsilon_k (y^k, u^k)$$

Cette quantité est toujours strictement positive puisque $\Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)$ est strictement défini positif et par suite inversible. Par définition même p_k^k s'écrit alors (formule (V.3) du chapitre 4) :

$$p_k^k (v^k, y^k, u^k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{(k+1)q} | \det \Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k) |^{\frac{1}{2}}} \times \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v^k - \tilde{V}^k(y^k, u^k)\|^2 [\Sigma_k^k(y^{k-1}, u^k)]^{-1} \right\}$$

Pour achever la démonstration, il reste donc à vérifier que le théorème est vrai pour $k=0$. Or, par définition, (formule (V.4) du chapitre 4)

$$\omega_0^0 (v_0, y_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{q+n}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v_0\|^2 + \|\rho_0(y_0) - \theta_0 \cdot v_0\|^2 \right\} \times | \det B_0^{-1} |$$

Le même calcul que précédemment montre alors que :

$$p_0^0 (v_0, y_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^q | \det \Sigma_0^0 |^{\frac{1}{2}}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v_0 - \tilde{V}^0(y_0)\|^2 (\Sigma_0^0)^{-1} \right\}$$

C.Q.F.D.

Comme nous l'avons déjà dit, il est facile, en utilisant les résultats des paragraphes IV et V du chapitre 4, de construire à partir des $\{p_j^j\}$ les densités de probabilité conditionnelles $\{p_k^j ; k=j+1, j+2, \dots\}$. Il est utile toutefois de connaître une expression de p_{k+1}^k , un peu plus maniable que celle donnée par application directe du lemme V.1 du chapitre 4 :

LEMME II.2.2

Les densités de probabilité conditionnelles $\{p_{k+1}^k ; k=0, 1, 2, \dots\}$ peuvent ici se mettre sous la forme :

$$p_{k+1}^k (v^{k+1}, w_{k+1}, y^k, u^k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{(k+2)q+n} | \det \Sigma_{k+1}^k(y^{k-1}, u^k) |^{\frac{1}{2}}} \times \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v^{k+1} - \tilde{V}^{k+1}(y^k, u^k)\|^2 [\Sigma_{k+1}^k(y^{k-1}, u^k)]^{-1} + \|w_{k+1}\|^2 \right\}$$

où $\sum_{k+1}^k$ est une application mesurable :

$$\sum_{k+1}^k : \mathbb{Y}^k \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}^{k+2}, \mathbb{V}^{k+2})$$

à valeurs strictement définies positives et définie par l'équation de récurrence

$$\begin{aligned} & [\sum_{k+1}^k (y^{k+1}, u^k)]^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} [\sum_k^{k-1} (y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} + \Theta'_k(y_{k-1}, u^k) \cdot \Theta_k(y_{k-1}, u^k) & \mathcal{O}_{(k+1)q}^q \\ \mathcal{O}_q^{(k+1)q} & \mathbb{I}_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

à partir de la condition initiale :

$$[\sum_1^0]^{-1} = \begin{pmatrix} [\sum_0^0]^{-1} & \mathcal{O}_q^q \\ \mathcal{O}_q^q & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}$$

et où $\hat{V}^{k+1}$ est une application mesurable :

$$\hat{V}^{k+1} : \mathbb{Y}^{k+1} \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathbb{V}^{k+2}$$

définie par l'équation de récurrence :

$$\begin{aligned} \hat{V}^{k+1}(y^k, u^k) &= \sum_{k+1}^k (y^{k+1}, u^k) \\ &\cdot \begin{pmatrix} [\sum_k^{k-1} (y^{k-2}, u^{k-1})]^{-1} \cdot \hat{V}^k(y^{k-1}, u^{k-1}) + \Theta'_k(y_{k-1}, u^k) \cdot \rho_k(y_{k-1}, y_k, u^k) \\ \mathcal{O}_q' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

à partir de la condition initiale :

$$\hat{V}^1(y_0) = \begin{pmatrix} \tilde{V}^0(y_0) \\ \mathcal{O}_q' \end{pmatrix}$$

(Θ_k et ρ_k étant définis par les formules (II.1), (II.2), (II.3) et (II.4)).

DEMONSTRATION :

D'après le lemme V,1 du chapitre 4 (formule (V.2)) :

$$\begin{aligned} p_{k+1}^k(v^{k+1}, w_{k+1}, y^k, u^k) &= p_k^k(v^k, y^k, u^k) \\ &\times \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{q+n}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v_{k+1}\|^2 + \|w_{k+1}\|^2 \right\} \end{aligned}$$

ou encore, étant donné l'expression de p_k^k obtenue au théorème II,3.1 :

$$\begin{aligned} & p_{k+1}^k(v^{k+1}, w_{k+1}, y^k, u^k) \\ = & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{(k+2)q+n} |\det \sum_k^k (y^{k+1}, u^k)|^{\frac{1}{2}}} \\ & \times \exp -\frac{1}{2} \left\{ \|v^k - \hat{V}^k(y^k, u^k)\|^2 [\sum_k^k (y^{k+1}, u^k)]^{-1} + \|v_{k+1}\|^2 + \|w_{k+1}\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Il est clair que P_{k+1}^k se met sous la forme annoncée si on prend :

$$\Sigma_{k+1}^k = \begin{pmatrix} \Sigma_k^k & O_{(k+1)q}^q \\ O_q^{(k+1)q} & I_q \end{pmatrix}$$

$$\hat{V}_{k+1}^k = \begin{pmatrix} \tilde{V}_k^k \\ O_q' \end{pmatrix}$$

En comparant ces égalités avec les relations récurrentes vérifiées par les Σ_k^k et $\tilde{V}_k^k$, on obtient :

$$[\Sigma_k^k]^{-1} = [\Sigma_{k-1}^{k-1}]^{-1} + O_k' \cdot O_k$$

$$\tilde{V}_k^k = \Sigma_k^k \cdot [(\Sigma_{k-1}^{k-1})^{-1} \cdot \hat{V}_{k-1}^{k-1} + O_k' \cdot \rho_k]$$

d'où l'on déduit facilement les équations récurrentes vérifiées par les Σ_{k+1}^k et $\hat{V}_{k+1}^k$.

REMARQUE II,2.3

Le lemme II,2.2 est encore vrai pour $k=-1$ à condition de prendre :

$$P_0^{-1} (v_0, w_0) = P_0 (v_0, w_0)$$

et :

$$\Sigma_0^{-1} = I_q, \quad \hat{V}_0^{-1} = O_q'$$

II,3. Calcul de probabilités conditionnelles universelles

LEMME II,3.1

Soient Σ_{k+1}^k et $\hat{V}_{k+1}^k$ les applications construites au lemme II,2.2 et Φ_{k+1} et Ψ_{k+1} celles définies par les formules (II.1) et (II.2).

La probabilité de transition :

$$Q^k : \mathcal{V}^{k+1} \times \mathcal{U}^{k+1} \longrightarrow \mathcal{X}$$

définie par :

$$Q^k (y^k, u^{k+1}; A)$$

$$= \frac{\int_{\mathcal{V}^{k+2}} 1_A \left[\Phi_{k+1}(u^{k+1}) \cdot v^{k+1} + \Psi_{k+1}(u^{k+1}) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\| v^{k+1} - \hat{V}_{k+1}^k(y^k, u^k) \right\|^2 \left[\Sigma_{k+1}^k(y^{k-1}, u^k) \right]^{-1} \right\}}{(\sqrt{2\pi})^{(k+2)q} \left| \det \Sigma_{k+1}^k(y^k, u^k) \right|^{\frac{1}{2}}} \mu^{k+1}(dv^{k+1})$$

est une probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

La probabilité de transition :

$$R^k : \mathcal{V}^{k+1} \times \mathcal{U}^{k+1} \longrightarrow \mathcal{W}$$

définie par :

$$R^k (y^k, u^{k+1}; B)$$

$$= \frac{\int_{\mathcal{V}^{k+2}} 1_B \left\{ H_{k+1}(y^k, u^{k+1}) [\Phi_{k+1}(u^{k+1}) \cdot v^{k+1} + \Psi_{k+1}(u^{k+1})] + B_{k+1}(y^k, u^{k+1}) \cdot w_{k+1} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\| v^{k+1} - \hat{V}_{k+1}^k(y^k, u^k) \right\|^2 \left[\Sigma_{k+1}^k(y^{k-1}, u^k) \right]^{-1} + \|w_{k+1}\|^2 \right\}}{(\sqrt{2\pi})^{(k+2)q+n} \left| \det \Sigma_{k+1}^k(y^k, u^k) \right|^{\frac{1}{2}}} \mu^{k+1}(dv^{k+1}) \nu(dw_{k+1})$$

est une probabilité conditionnelle universelle pour Y_{k+1} relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$.

DEMONSTRATION :

Compte tenu de l'expression de P_{k+1}^k obtenue au lemme II,2.2, ces résultats sont une conséquence directe du corollaire IV.4 du chapitre 4.

REMARQUE II,3.2

Les probabilités Q^{-1} et R^{-1} définies sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ par les formules du lemme II,3.1 ne sont autres que les probabilités $P_0(X_0)^{-1}$ et $P_0(Y_0)^{-1}$ images par X_0 et Y_0 de la probabilité P_0 définie sur $(V, \mathcal{V}) \times (W, \mathcal{W})$ par :

$$P_0(F_0) = \int 1_{F_0}(v_0, w_0) \ell_0(v_0, w_0) \mu(dv_0) \nu(dw_0)$$

(voir remarque II,2.3).

II,4. Equations de Kalman

On peut éviter, dans les applications, l'emploi du vecteur $\hat{V}^{k+1}$ ou de l'opérateur linéaire Σ_{k+1}^k , peu commodes en raison de leur importante dimension (croissante avec k), en utilisant les équations de Kalman,

THEOREME II,4.1

Soient $\{\Xi_k; k=0,1,2,\dots\}$ et $\{\hat{X}_k; k=0,1,2,\dots\}$ les applications mesurables

$$\begin{aligned} \Xi_k &: \mathcal{Y}^{k+1} \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \\ \hat{X}_k &: \mathcal{Y}^k \times \mathbb{U}^k \longrightarrow \mathcal{X} \end{aligned}$$

définies par les deux équations récurrentes (dites équations de Kalman) :

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1}(y^{k+1}, u^{k+1}) &= A_{k+1}(u_{k+1}) \cdot A_{k+1}'(u_{k+1}) + F_{k+1}(u_{k+1}) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot F_{k+1}'(u_{k+1}) \\ &\quad - F_{k+1}(u_{k+1}) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot H_k'(y_{k+1}, u_k) \\ &\quad \cdot [B_k(y_{k+1}, u_k) \cdot B_k'(y_{k+1}, u_k) + H_k'(y_{k+1}, u_k) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot H_k(y_{k+1}, u_k)]^{-1} \\ &\quad \cdot H_k(y_{k+1}, u_k) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot F_{k+1}'(u_{k+1}) \end{aligned}$$

à partir de la condition initiale

$$\Xi_0 = A_0 \cdot A_0'$$

et :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1}(y^k, u^{k+1}) &= F_{k+1}(u_{k+1}) \cdot \hat{X}_k(y^{k+1}, u^k) + g_{k+1}(u_{k+1}) \\ &\quad + F_{k+1}(u_{k+1}) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot H_k'(y_{k+1}, u_k) \\ &\quad \cdot [B_k(y_{k+1}, u_k) \cdot B_k'(y_{k+1}, u_k) + H_k'(y_{k+1}, u_k) \cdot \Xi_k(y^{k+2}, u^k) \cdot H_k(y_{k+1}, u_k)]^{-1} \\ &\quad \cdot [y_k - H_k(y_{k+1}, u_k) \hat{X}_k(y^{k+1}, u^k)] \end{aligned}$$

à partir de la condition initiale :

$$\hat{X}_0 = g_0$$

Alors, les probabilités conditionnelles universelles Q^{k-1} et R^{k-1} construites au lemme II,3.1 vérifient les identités suivantes, quel que soit $k \geq 1$:

1 - pour tout $x \in X$:

$$(II.5) \quad \int_X x' \cdot x_k Q^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dx_k) = x' \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k)$$

2 - pour tout $D \in \mathcal{L}(X, X)$, symétrique :

$$(II.6) \quad \int_X x'_k \cdot D \cdot x_k Q^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dx_k) = \hat{X}'_k(y^{k-1}, u^k) \cdot D \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) + \text{tra} \{ D \cdot \Xi_k(y^{k-2}, u^k) \}$$

3 - pour tout $x \in X$:

$$(II.7) \quad \int_X \exp(i x' \cdot x_k) Q^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dx_k) = \exp \left\{ i x' \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) - \frac{1}{2} x' \cdot \Xi_k(y^{k-2}, u^k) \cdot x \right\}$$

4 - pour tout $y \in Y$

$$(II.8) \quad \int_Y y' \cdot y_k R^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dy_k) = y' \cdot H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k)$$

5 - pour tout $\Delta \in \mathcal{L}(Y, Y)$, symétrique :

$$(II.9) \quad \int_Y y'_k \cdot \Delta \cdot y_k R^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dy_k) = \hat{X}'_k(y^{k-1}, u^k) H'_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \Delta \cdot H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) + \text{tra} \{ \Delta \cdot [H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \Xi_k(y^{k-2}, u^k) \cdot H'_k(y_{k-1}, u_k) + B_k(y_{k-1}, u_k) \cdot B'_k(y_{k-1}, u_k)] \}$$

6 - pour tout $y \in Y$:

$$(II.10) \quad \int_Y \exp(i y' \cdot y_k) R^{k-1}(y^{k-1}, u^k; dy_k) = \exp \left\{ i y' \cdot H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) - \frac{1}{2} y' \cdot [H_k(y_{k-1}, u_k) \cdot \Xi_k(y^{k-2}, u^k) \cdot H'_k(y_{k-1}, u_k) + B_k(y_{k-1}, u_k) \cdot B'_k(y_{k-1}, u_k)] \cdot y \right\}$$

DEMONSTRATION :

Etant donné les expressions de Q^{k-1} et R^{k-1} obtenues au lemme II,3.1, il est clair, d'après les propriétés des intégrales gaussiennes, que les formules (II.5) à (II.10) du théorème seront vérifiées si on prend :

$$\hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) = \Phi_k(u^k) \cdot \hat{V}^k(y^{k-1}, u^{k-1}) + \Psi_k(u^k)$$

$$\Xi_k(y^{k-2}, u^k) = \Phi_k(u^k) \cdot \Sigma^{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) \cdot \Phi'_k(u^k)$$

Supposons donc $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k, \dots$ et $\Xi_0, \Xi_1, \dots, \Xi_k, \dots$ définis de cette façon. On a bien :

$$\hat{X}_0 = \Phi_0 \cdot \hat{V}^0 + \Psi_0 = g_0$$

$$\Xi_0 = \Phi_0 \cdot \Sigma_0^{-1} \cdot \Phi'_0 = A_0 \cdot A'_0$$

Il reste à montrer que les équations de Kalman sont satisfaites. Rappelons que, par définition :

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= (F_{k+1} \cdot \Phi_k, A_{k+1}) \\ \Psi_{k+1} &= g_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Psi_k \\ \Sigma_{k+1}^k &= \begin{pmatrix} [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Theta_k' \cdot \Theta_k]^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \\ \hat{V}_{k+1} &= \begin{pmatrix} [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Theta_k' \cdot \Theta_k]^{-1} \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} \cdot \hat{V}^k + \Theta_k' \cdot \rho_k] \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(où Θ_k et ρ_k sont définis par les formules (II.3) et (II.4)).

On en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1} &= F_{k+1} \cdot \Phi_k \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Theta_k' \cdot \Theta_k]^{-1} \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} \cdot \hat{V}^k + \Theta_k' \cdot \rho_k] + g_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Psi_k \\ \Xi_{k+1} &= A_{k+1} \cdot A_{k+1}' + F_{k+1} \cdot \Phi_k \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Theta_k' \cdot \Theta_k]^{-1} \cdot \Phi_k' \cdot F_{k+1}'\end{aligned}$$

Puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\Theta_k' \cdot \Theta_k &= \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot H_k \cdot \Phi_k \\ \Theta_k' \cdot \rho_k &= \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot (y_k - H_k \Psi_k)\end{aligned}$$

les égalités précédentes s'écrivent encore :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1} &= F_{k+1} \cdot \Phi_k \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot H_k \cdot \Phi_k]^{-1} \\ &\quad \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} \cdot \hat{V}^k + \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot (y_k - H_k \Psi_k)] \\ &\quad + g_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Psi_k\end{aligned}\tag{II.11}$$

$$\begin{aligned}\Xi_{k+1} &= A_{k+1} \cdot A_{k+1}' \\ &\quad + F_{k+1} \cdot \Phi_k \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} + \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot H_k \cdot \Phi_k]^{-1} \cdot \Phi_k' \cdot F_{k+1}'\end{aligned}\tag{II.12}$$

Appliquons alors l'identité matricielle classique :

$$[A + B \cdot C \cdot B']^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \cdot B [C^{-1} + B' \cdot A^{-1} \cdot B]^{-1} \cdot B' \cdot A^{-1}$$

(voir par exemple Aoki [1], p. 79, appendice D).

L'équation (II.11) devient :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1} &= F_{k+1} \cdot \Phi_k \cdot [\Sigma_k^{k-1} - \Sigma_k^{k-1} \Phi_k' H_k' [B_k \cdot B_k' + H_k \Phi_k \Sigma_k^{k-1} \Phi_k' H_k']^{-1} H_k \Phi_k \Sigma_k^{k-1}] \\ &\quad \cdot [(\Sigma_k^{k-1})^{-1} \cdot \hat{V}^k + \Phi_k' \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot (y_k - H_k \Psi_k)] \\ &\quad + g_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Psi_k\end{aligned}$$

ou encore, par définition de Ξ_k et de $\hat{X}_k$:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+1} &= F_{k+1} \cdot \hat{X}_k + g_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Xi_k \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot (y_k - H_k \Psi_k) \\ &\quad - F_{k+1} \cdot \Xi_k \cdot H_k' [B_k \cdot B_k' + H_k \cdot \Xi_k \cdot H_k']^{-1} \\ &\quad \cdot [H_k (\hat{X}_k - \Psi_k) + H_k \cdot \Xi_k \cdot H_k' \cdot (B_k \cdot B_k')^{-1} \cdot (y_k - H_k \Psi_k)]\end{aligned}$$

Si on remarque que :

$$\begin{aligned} & [B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k]^{-1} H_k \Sigma_k H'_k \\ &= I - [B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k]^{-1} (B_k \cdot B'_k) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= F_{k+1} \cdot \hat{X}_k + g_{k+1} - F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k (B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k)^{-1} H_k \cdot \hat{X}_k \\ &\quad + F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k \cdot (B_k \cdot B'_k)^{-1} \cdot (y_k - H_k \cdot \Psi_k) \\ &\quad - F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k \cdot (B_k \cdot B'_k)^{-1} \cdot (y^k - H_k \cdot \Psi_k) \\ &\quad + F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k \cdot [B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k]^{-1} H_k \cdot \Psi_k \\ &\quad + F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k \cdot [B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k]^{-1} \cdot (y_k - H_k \cdot \Psi_k) \\ &= F_{k+1} \cdot \hat{X}_k + g_{k+1} \\ &\quad + F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k [B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k]^{-1} \cdot (y_k - H_k \cdot \hat{X}_k) \end{aligned}$$

Quant à l'équation (II.12), elle s'écrit de même :

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= A_{k+1} \cdot A'_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Phi_k \\ &\quad \cdot [\Sigma_k^{k-1} - \Sigma_k^{k-1} \Phi'_k H'_k (B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Phi_k \Sigma_k^{k-1} \Phi'_k H'_k)^{-1} H_k \cdot \Phi_k \Sigma_k^{k-1}] \cdot \Phi'_k \cdot F'_{k+1} \end{aligned}$$

ou encore, par définition de Σ_k :

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= A_{k+1} \cdot A'_{k+1} + F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot F'_{k+1} \\ &\quad - F_{k+1} \cdot \Sigma_k \cdot H'_k \cdot (B_k \cdot B'_k + H_k \cdot \Sigma_k \cdot H'_k)^{-1} H_k \cdot \Sigma_k \cdot F'_{k+1} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

REMARQUE II.4.2

D'après les formules (II.7) et (II.10), $Q^{k-1}(y^{k-1}, u^k; \cdot)$ et $R^{k-1}(y^{k-1}, u^k; \cdot)$ sont donc des probabilités gaussiennes. Q^{k-1} peut éventuellement être dégénérée (si Σ_k n'est pas strictement définie positive) mais non R^{k-1} (du fait de l'inversibilité de B_k).

REMARQUE II.4.3.

Les identités (II.5) à (II.10) sont encore vraies pour $k=0$ à condition de prendre pour Q^{-1} et R^{-1} les probabilités images de P_0 par X_0 et Y_0 (voir remarque II.3.2).

REMARQUE II.4.4.

Les résultats du théorème précédent ne doivent pas être considérés comme un « miracle ». On sait en effet, d'après le théorème VI.2.1 et le corollaire VI.2.2 du chapitre 4, que les probabilités conditionnelles universelles Q^{k-1} et R^{k-1} pour X_k et Y_k peuvent être calculées directement au moyen d'équations de récurrence. On pourrait donc établir les équations de Kalman sans utiliser les densités de probabilité conditionnelles p_k^k et p_{k+1}^k . Cela est d'ailleurs fait par Striebel [26] dans le cas particulier où $A_k \cdot A'_k$ est inversible (à des différences de présentation près).

REMARQUE II,4.5.

Le modèle décrit au paragraphe I n'est pas tout à fait le plus général pour lequel on puisse montrer des équations de type Kalman. On pourrait encore le compliquer en supposant V_k et W_k corrélés, F_k , g_k et A_k fonction non seulement de u_k mais aussi de y_{k-1} ou même F_k, g_k, A_k, H_k, B_k fonction de $u_1, u_2, \dots, u_k$ et $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. L'exemple traité ici a toutefois été choisi de sorte qu'il ne soit pas possible d'éliminer la commande par décomposition linéaire.



III - EXEMPLE DE JEU SÉQUENTIEL STOCHASTIQUE : PROCESSUS DE KALMAN AVEC COÛT QUADRATIQUE

III,1. Introduction

Dans ce paragraphe, nous avons dû nous restreindre à la forme «classique» du système (I.1) considéré au paragraphe I : nous supposons F_k, A_k, H_k, B_k constants et g_k linéaire. Après avoir associé au processus d'observation Y_k aussi obtenu, un processus de coût L_k fonction quadratique du processus d'état X_k et de la commande u_k , nous nous proposons d'utiliser les résultats du chapitre 5 pour étendre au cas des jeux séquentiels un résultat classique d'optimisation ordinaire (voir par exemple Aoki [1], II.2, II.3 et V.3). Comme au chapitre 5, nous ferons toutefois l'hypothèse essentielle que les deux joueurs disposent de la même observation Y_k et connaissent à chaque instant les commandes antérieures de l'un et l'autre. Nous n'envisageons pas le cas avec «information incomplète» où chaque joueur a une observation différente (chacun ne disposant que d'une partie de l'observation totale Y_k) et ignore les commandes antérieures de l'adversaire. L'étude de ce problème, d'un intérêt pratique certain, est malheureusement beaucoup plus difficile (les résultats actuels sont inextricables pour un horizon supérieur à 2 : voir Yoshikawa [31] et Bley [6] chapitre 3).

La méthode que nous employons peut sembler lourde. Mais elle permet d'obtenir une politique optimale parmi toutes les politiques (mesurables) et non pas seulement parmi les politiques linéaires, ou du second ordre. En outre, elle ne nécessite pas la connaissance préalable de la politique optimale, dont il suffirait alors de vérifier l'optimalité.

III,2. Optimisation des processus de Kalman à coût quadratique (en horizon fini)

Considérons donc à nouveau le processus d'état $\{X_k\}$ et le processus d'observation $\{Y_k\}$ décrits au paragraphe I. Supposons toutefois ici l'horizon fini, égal à N , les applications F_k, A_k, H_k, B_k constantes (c'est-à-dire indépendantes de u_k et y_{k-1}) et l'application g_k de la forme :

$$g_k(u_k) = G_k \cdot u_k \quad \text{où} \quad G_k \in \mathcal{L}(U, X)$$

$\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ vérifient donc l'équation d'évolution et l'équation d'observation :

$$\begin{cases} X_k = F_k \cdot X_{k-1} + G_k \cdot u_k + A_k \cdot v_k \\ Y_k = H_k \cdot X_k + B_k \cdot w_k \end{cases}$$

pour $k=1, 2, \dots, N$, avec pour conditions initiales :

$$\begin{cases} X_0 = g_0 + A_0 \cdot v_0 \\ Y_0 = H_0 \cdot X_0 + B_0 \cdot w_0 \end{cases}$$

$\{(V_k, W_k)\}$ étant un processus gaussien normalisé sans mémoire.

Supposons que l'espace de commande $U = \mathbb{R}^m$ se décompose en : $U = U_1 \times U_2$ où $U_1 = \mathbb{R}^{m_1}$ et $U_2 = \mathbb{R}^{m_2}$ avec $m_1 + m_2 = m$

On désignera par u_k^1 et u_k^2 les m_1 premières et les m_2 dernières coordonnées de $u_k \in U$. On supposera toujours si u_k^1 ou u_k^2 et u_k interviennent dans une même formule que :

$$u_k = \begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \end{pmatrix}$$

On posera :

$$G_k = (G_k^1, G_k^2) \text{ où } G_k^1 \in \mathcal{L}(L//_1, \mathbb{X}) \text{ et } G_k^2 \in \mathcal{L}(L//_2, \mathbb{X}) \text{ de sorte que :}$$

$$G_k \begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \end{pmatrix} = G_k^1 \cdot u_k^1 + G_k^2 \cdot u_k^2 \quad \text{pour tous } u_k^1 \in L//_1, u_k^2 \in L//_2$$

On considèrera $L//_1$ comme l'espace des commandes de poursuite, $L//_2$ comme l'espace des commandes d'évasion.

Au processus d'observation $\{Y_k\}$ nous associons le processus de coût $\{L_k\}$ défini par :

$$L_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ = \|X_k (v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_k)\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots, N$, et :

$$L_0 (v_0) = \|X_0 (v_0)\|_{D_0}^2$$

où :

- D_k est un opérateur symétrique appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$.
- E_k^1 est un opérateur symétrique strictement défini positif appartenant à $\mathcal{L}(L//_1, L//_1)$.
- E_k^2 est un opérateur symétrique strictement défini positif appartenant à $\mathcal{L}(L//_2, L//_2)$.

On posera

$$E_k = \begin{pmatrix} E_k^1 & \mathcal{O}_{m_1}^{m_2} \\ \mathcal{O}_{m_2}^{m_1} & -E_k^2 \end{pmatrix} \text{ de sorte que :}$$

$$L_k = \|X_k\|_{D_k}^2 + \|u_k\|_{E_k}^2 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N$$

Nous cherchons une politique de poursuite optimale, et accessoirement sa politique d'évasion conjuguée, conformément aux définitions du paragraphe III du chapitre 5. La solution de ce problème d'optimisation est donnée par le théorème suivant :

THEOREME III,2.1

Soient $\hat{X}_k$ l'application mesurable :

$$\hat{X}_k : \mathbb{Y}^k \times L//^k \longrightarrow \mathbb{X}$$

et Ξ_k l'opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ (symétrique semi-défini positif) définis par les équations de Kalman :

$$\hat{X}_{k+1} (y^k, u^{k+1}) = F_{k+1} \cdot \hat{X}_k (y^{k-1}, u^k) + G_{k+1} \cdot u_{k+1} \\ + F_{k+1} \cdot \Xi_k \cdot H_k' \cdot [B_k \cdot B_k' + H_k \cdot \Xi_k \cdot H_k']^{-1} \cdot [y_k - H_k \cdot \hat{X}_k (y^{k-1}, u^k)]$$

$$\Xi_{k+1} = A_{k+1} \cdot A_{k+1}' + F_{k+1} \cdot \Xi_k \cdot F_{k+1}' \\ - F_{k+1} \cdot \Xi_k \cdot H_k' \cdot [B_k \cdot B_k' + H_k \cdot \Xi_k \cdot H_k']^{-1} \cdot H_k \cdot \Xi_k \cdot F_{k+1}'$$

à partir des conditions initiales :

$$\hat{X}_0 = g_0 \quad \Xi_0 = A_0 \cdot A_0'$$

Soit Λ_k l'opérateur symétrique de $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ définie par l'équation récurrente à rebours :

$$\Lambda_k = D_k + F_{k+1}' \cdot \Lambda_{k+1} \cdot F_{k+1} \\ - F_{k+1}' \cdot \Lambda_{k+1} \cdot G_{k+1} \cdot [E_{k+1} + G_{k+1}' \cdot \Lambda_{k+1} \cdot G_{k+1}]^{-1} \cdot G_{k+1}' \cdot \Lambda_{k+1} \cdot F_{k+1}$$

(III.1)

à partir de la condition finale $\Lambda_N = D_N$

Soit $\{(\tilde{y}_1^1, \hat{y}_1^1), (\tilde{y}_1^2, \hat{y}_1^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^1), \dots, (\tilde{y}_N^2, \hat{y}_N^2)\}$ la politique définie par :

$$(III.2) \quad \begin{cases} \tilde{y}_k^1(y^{k-1}, u^{k-1}) \\ \tilde{y}_k^2(y^{k-1}, u^{k-1}) \end{cases} = [E_k + G_k' \Lambda_k G_k]^{-1} G_k' \Lambda_k F_k \tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1})$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1}) = \hat{X}_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) + \Delta_{k-1} [y_{k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1})] \\ \Delta_{k-1} = \Xi_{k-1} H_{k-1}' (B_{k-1} B_{k-1}' + H_{k-1} \Xi_{k-1} H_{k-1}')^{-1} \end{cases}$$

où

Si :

1 - pour tout $k = 1, 2, \dots, N$, on a :

$$\begin{cases} E_k^2 - G_k^2' \Lambda_k G_k^2 > 0 \\ E_k^1 + G_k^1' \Lambda_k G_k^1 + G_k^1' \Lambda_k G_k^2 (E_k^2 - G_k^2' \Lambda_k G_k^2)^{-1} G_k^2' \Lambda_k G_k^1 > 0 \end{cases}$$

alors :

2 - toute politique de poursuite est admissible

3 - toute politique d'évasion est admissible relativement à $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_1^2, \dots, \tilde{y}_N^1)$.

4 - $(\hat{y}_1^1, \hat{y}_1^2, \dots, \hat{y}_N^2)$ est une politique d'évasion conjuguée de $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_1^2, \dots, \tilde{y}_N^1)$.

5 - $(\tilde{y}_1^1, \tilde{y}_1^2, \dots, \tilde{y}_N^1)$ est une politique de poursuite optimale.

(« admissible », « conjuguée » et « optimale » étant pris au sens des définitions du paragraphe III du chapitre 5).

La condition 1) sera en particulier toujours vérifiée sous l'hypothèse supplémentaire suivante :

6 - pour tout $k = 1, 2, \dots, N$, on a :

$$\begin{cases} D_k < 0 \\ G_k^2 (E_k^2)^{-1} G_k^{2'} - G_k^1 (E_k^1)^{-1} G_k^{1'} \geq 0 \end{cases}$$

N.B. - Les notations > 0 ou ≥ 0 signifient respectivement strictement défini positif et semi défini positif.

REMARQUE III,2.2.

On peut appliquer le théorème précédent pour obtenir une politique optimale dans le cas d'une optimisation à un seul joueur, cherchant par exemple à minimiser le coût : on considère $\mathcal{U}_1$ comme l'espace de commande, on fait $G_k^2 = 0$; on vérifie aisément que la condition 1) est réalisée si $D_k \geq 0$

DEMONSTRATION DU THEOREME :

Notre but est évidemment de montrer que les hypothèses du théorème général d'optimalité III,5.2 du chapitre 5 sont réunies. La démonstration, assez longue, a été divisée en plusieurs parties.

Première Partie

Nous allons d'abord montrer que les parties positives et négatives L_k^+ et L_k^- du coût admettent relativement à $(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ des espérances conditionnelles universelles *M_k et *M_k finies et calculer la différence $M_k = {}^*M_k - {}^*M_k$

Remarquons en effet que le processus de coût L_k peut s'écrire $L_k = {}^oL_k - {}_oL_k$, où, pour $k \geq 1$:

$${}^oL_k = \|x_k\| D_k^+ + \|u_k^1\| E_k^1 \geq 0$$

$${}_oL_k = \|x_k\| D_k^- + \|u_k^2\| E_k^2 \geq 0$$

D_k^+ et D_k^- étant les parties semi-définie positive et semi-définie négative de l'opérateur symétrique D_k : $D_k = D_k^+ - D_k^-$, $D_k^+ \geq 0$, $D_k^- \geq 0$.

Soit Q^{k-1} la probabilité conditionnelle universelle pour X_k relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ construite au lemme II,3.1 du paragraphe II. D'après le théorème V,3.2 du paragraphe V du chapitre 2, d'une part, et le théorème II,4 du paragraphe II d'autre part, oL_k et ${}_oL_k$ admettent pour espérances conditionnelles universelles relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ (cf. formule (II,6)) :

$$(III.3) \quad \begin{aligned} {}^oM_k &= \int_{\mathcal{X}} [\|x_k\|_{D_k^+}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2] Q^{k-1}(dx_k) \\ &= \| \hat{X}_k \|_{D_k^+}^2 + \| u_k^1 \|_{E_k^1}^2 + \text{tra} (D_k^+ . \Xi_k) \end{aligned}$$

et :

$$(III.4) \quad \begin{aligned} {}_oM_k &= \int_{\mathcal{X}} [\|x_k\|_{D_k^-}^2 + \|u_k^2\|_{E_k^2}^2] Q^{k-1}(dx_k) \\ &= \| \hat{X}_k \|_{D_k^-}^2 + \| u_k^2 \|_{E_k^2}^2 + \text{tra} (D_k^- . \Xi_k) \end{aligned}$$

qui sont visiblement finies.

De même L_k^+ et L_k^- admettent pour espérances conditionnelles universelles relativement à $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1})$:

$$\begin{aligned} {}^*M_k &= \int_{\mathcal{X}} [\|x_k\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2]^+ Q^{k-1}(dx_k) \\ {}^*M_k &= \int_{\mathcal{X}} [\|x_k\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2]^- Q^{k-1}(dx_k) \end{aligned}$$

Or, il est clair que :

$$\begin{aligned} [\|x_k\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2]^+ &\leq \|x_k\|_{D_k^+}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 \\ [\|x_k\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2]^- &\leq \|x_k\|_{D_k^-}^2 + \|u_k^2\|_{E_k^2}^2 \\ \|x_k\|_{D_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2 &= \|x_k\|_{D_k^+}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - (\|x_k\|_{D_k^-}^2 + \|u_k^2\|_{E_k^2}^2) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} {}^*M_k &\leq {}^oM_k < +\infty \\ {}^*M_k &\leq {}_oM_k < +\infty \\ M_k &= {}^*M_k - {}^*M_k = {}^oM_k - {}_oM_k \end{aligned}$$

La dernière égalité s'écrit, d'après les expressions de oM_k et ${}_oM_k$ obtenues précédemment (formules (III.3) et (III.4)) :

$$(III.5) \quad M_k = \| \hat{X}_k \|_{D_k}^2 + \| u_k^1 \|_{E_k^1}^2 - \| u_k^2 \|_{E_k^2}^2 + \text{tra} (D_k . \Xi_k)$$

On a donc en particulier pour $k=N$:

$$\begin{aligned} {}^*C_N &= {}^*M_N < +\infty \\ {}^*C_N &= {}^*M_N < +\infty \\ C_N &= {}^*C_N - {}^*C_N = \| \hat{X}_N \|_{D_N}^2 + \| u_N^1 \|_{E_N^1}^2 - \| u_N^2 \|_{E_N^2}^2 + \text{tra} (D_N . \Xi_N) \end{aligned}$$

Le raisonnement précédent est encore valable pour $k=0$, à condition de prendre :

$$\begin{aligned} {}^oL_0 &= \|X_0\|_{D_0^+}^2 \\ {}_oL_0 &= \|X_0\|_{D_0^-}^2 \end{aligned}$$

On montre de même pour les espérances *M_0 et ${}_*M_0$ de L_0^+ et L_0^- :

$$\begin{aligned} {}^*M_0 &< +\infty \\ {}_*M_0 &< +\infty \\ \text{(III.6)} \quad M_0 &= {}^*M_0 - {}_*M_0 = \|\hat{X}_0\|_{D_0}^2 + \text{tra} (D_0 \cdot \Xi_0) \end{aligned}$$

Deuxième Partie

Nous allons maintenant supposer qu'à l'instant k , les fonctions de Bellman *C_k et ${}_*C_k$, associées à la politique partielle $\{(\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), (\tilde{y}_{k+1}^1, \hat{y}_{k+1}^2), \dots, (\tilde{y}_N^1, \hat{y}_N^2)\}$ au moyen des équations récurrentes (III.5) et (III.6) du lemme III.5.1 du chapitre 5, ne sont jamais infinies et que leur différence $C_k = {}^*C_k - {}_*C_k$ (qui est par suite toujours définie) prend la forme (si $k \geq 1$):

$$\text{(III.7)} \quad C_k(y^{k-1}, u^k) = \|\hat{X}_k(y^{k-1}, u^k)\|_{\Lambda_k}^2 + \|u_k^1\|_{E_k^1}^2 - \|u_k^2\|_{E_k^2}^2 + a_k$$

où a_k est une constante réelle et Λ_k un élément symétrique de $\mathcal{L}(X, X)$.

Ces hypothèses sont vérifiées pour $k=N$ à condition de prendre :

$$\begin{aligned} \Lambda_N &= D_N \quad (\text{réalisé par hypothèse}) \\ a_N &= \text{tra} (D_N \cdot \Xi_N) \end{aligned}$$

comme on l'a montré en première partie.

En vue de trouver les applications $\hat{X}_k^1, \tilde{y}_k^1$ et $\hat{y}_k^2$ satisfaisant aux conditions 2), 3) et 4) du théorème III.5.2 du chapitre 5, nous allons chercher à maximiser C_k par rapport à u_k^2 (pour obtenir la relation (III.9) du théorème III.5.2), puis à minimiser ce maximum par rapport à u_k^1 (pour obtenir la relation (III.10) du théorème III.5.2).

Par construction :

$$\hat{X}_k(y^{k-1}, u^k) = F_k \cdot \tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1}) + G_k^1 \cdot u_k^1 + G_k^2 \cdot u_k^2$$

d'où, si (III.7) est vérifiée :

$$\begin{aligned} C_k(y^{k-1}, u^{k-1}, u_k^1, u_k^2) &= \|\tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1})\|_{F_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k}^2 \\ &+ \|u_k^1\|^2 (G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 + E_k^1) + \|u_k^2\|^2 (G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 - E_k^2) \\ &+ 2 u_k^{1'} \cdot G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1}) \\ &+ 2 u_k^{2'} \cdot G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1}(y^{k-1}, u^{k-1}) \\ &+ 2 u_k^{2'} G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 u_k^1 + a_k \end{aligned}$$

Avec les notations :

$$\begin{aligned} \bar{E}_k^1 &= E_k^1 + G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 \\ \bar{E}_k^2 &= E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \\ T_k &= G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 \\ Z_k^1 &= G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1} \\ Z_k^2 &= G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1} \\ \bar{a}_k &= a_k + \|\tilde{X}_{k-1}\|^2 F_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k \end{aligned}$$

C_k s'écrit simplement

$$C_k = \begin{aligned} & \|u_k^1\|^2 \bar{E}_k^{-1} - \|u_k^2\|^2 \bar{E}_k^{-2} + 2 u_k^{2'} T_k u_k^1 \\ & + 2 u_k^{1'} Z_k^1 + 2 u_k^{2'} Z_k^2 + \bar{a}_k \end{aligned}$$

Par hypothèse (condition 1) $\bar{E}_k^{-2}$ est strictement défini positif et en particulier inversible. C_k s'écrit donc encore :

$$C_k = \begin{aligned} & - \|u_k^2 - (\bar{E}_k^{-2})^{-1} [Z_k^2 + T_k u_k^1]\|^2 \bar{E}_k^{-2} \\ & + \|Z_k^2 + T_k u_k^1\|^2 (\bar{E}_k^{-2})^{-1} \\ & + \|u_k^1\|^2 \bar{E}_k^{-1} + 2 u_k^{1'} Z_k^1 + \bar{a}_k \end{aligned}$$

$C_k(y^{k-1}, u^{k-1}, u_k^1, u_k^2)$ est donc maximal par rapport à u_k^2 pour :

$$u_k^2 = \chi_k^2(y^{k-1}, u^{k-1}, u_k^1)$$

où :

$$\chi_k^2 = (\bar{E}_k^{-2})^{-1} [Z_k^2 + T_k u_k^1]$$

Ce maximum vaut :

$$\begin{aligned} \max_{u_k^2} C_k &= \|Z_k^2 + T_k u_k^1\|^2 (\bar{E}_k^{-2})^{-1} + \|u_k^1\|^2 \bar{E}_k^{-1} \\ &+ 2 u_k^{1'} Z_k^1 + \bar{a}_k \\ &= \|u_k^1\|^2 [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k] + 2 u_k^{1'} [T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 + Z_k^1] \\ &+ \|Z_k^2\|^2 (\bar{E}_k^{-2})^{-1} + \bar{a}_k \end{aligned}$$

Par hypothèse $[\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]$ est strictement défini positif, et en particulier inversible. D'où :

$$\begin{aligned} \max_{u_k^2} C_k &= \|u_k^1 + [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} [T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 + Z_k^1]\|^2 [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k] \\ &- \|T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 + Z_k^1\|^2 [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} \\ &+ \|Z_k^2\|^2 (\bar{E}_k^{-2})^{-1} + \bar{a}_k \end{aligned}$$

$\{\max_{u_k^2} C_k(y^{k-1}, u^{k-1}, u_k^1, u_k^2)\}$ est minimal par rapport à u_k^1 pour :

$$u_k^1 = \tilde{y}_k^1(y^{k-1}, u^{k-1})$$

où :

$$\tilde{y}_k^1 = - [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} [T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 + Z_k^1]$$

Ce minimum vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k &= \min_{u_k^1} \{ \max_{u_k^2} C_k \} \\ &= - \|T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 + Z_k^1\|^2 [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} + \|Z_k^2\|^2 (\bar{E}_k^{-2})^{-1} + \bar{a}_k \\ &= - \|Z_k^1\|^2 [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} + 2 Z_k^{1'} [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} Z_k^2 \\ &+ \|Z_k^2\|^2 [(\bar{E}_k^{-2})^{-1} - (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k [\bar{E}_k^{-1} + T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1} T_k]^{-1} T_k' (\bar{E}_k^{-2})^{-1}] \\ &+ \bar{a}_k \end{aligned}$$

Rappelons la formule d'inversion d'une matrice symétrique par blocs (voir par exemple Aoki [1], appendice D, page 80),

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_k' & T_k' \\ T_k & -\bar{E}_k^z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1} & [\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1}T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1} \\ (\bar{E}_k^z)^{-1}T_k[\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1} & -(\bar{E}_k^z)^{-1} + (\bar{E}_k^z)^{-1}T_k[\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1}T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit d'abord :

$$\tilde{C}_k = - \begin{pmatrix} Z_k^{1'} & Z_k^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_k' & T_k' \\ T_k & -\bar{E}_k^z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_k^1 \\ Z_k^2 \end{pmatrix} + \bar{a}_k$$

Remarquons alors que, par définition :

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_k' & T_k \\ T_k & -\bar{E}_k^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k' & 0 \\ 0 & -E_k^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k^{1'} \\ G_k^{2'} \end{pmatrix} \cdot \Lambda_k \cdot \begin{pmatrix} G_k^1 & G_k^2 \end{pmatrix}$$

$$= E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k$$

et

$$\begin{pmatrix} Z_k^1 \\ Z_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_k^{1'} \\ G_k^{2'} \end{pmatrix} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1} = G_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1}$$

$$= G_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot [\hat{X}_{k-1} + \Delta_{k-1} \cdot (y_{k-1} - H_{k-1} \cdot \hat{X}_{k-1})]$$

d'où :

$$(III.8) \quad \tilde{C}_k = \|\hat{X}_{k-1} + \Delta_{k-1} \cdot (y_{k-1} - H_{k-1} \cdot \hat{X}_{k-1})\| \tilde{\Lambda}_{k-1} + a_k$$

avec :

$$(III.9) \quad \tilde{\Lambda}_{k-1} = F_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k - F_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k \cdot [E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k]^{-1} \cdot G_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k$$

On peut maintenant vérifier que les applications $\tilde{y}_k^1$ et $\tilde{y}_k^2$, définie par :

$$\tilde{y}_k^2(y^{k-1}, u^{k-1}) = \chi_k^2[y^{k-1}, u^{k-1}, \tilde{y}_k^1(y^{k-1}, u^{k-1})]$$

sont bien de la forme annoncée (formule (III.2)).

En effet :

$$\tilde{y}_k^1 = -[\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1} \cdot [T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}Z_k^2 + Z_k^1]$$

$$\tilde{y}_k^2 = (\bar{E}_k^z)^{-1} \cdot \{Z_k^2 - T_k[\bar{E}_k' + T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}T_k]^{-1} \cdot [T_k'(\bar{E}_k^z)^{-1}Z_k^2 + Z_k^1]\}$$

ce qui s'écrit, d'après la formule d'inversion par blocs :

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_k^1 \\ \tilde{y}_k^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{E}_k' & T_k' \\ T_k & -\bar{E}_k^z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_k^1 \\ Z_k^2 \end{pmatrix}$$

$$= [E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k]^{-1} \cdot G_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k \cdot \tilde{X}_{k-1}$$

Troisième Partie

Nous allons montrer maintenant que, si les hypothèses faites en deuxième partie sur *C_k , *C_k et C_k sont vraies à l'instant $k \geq 1$ (c'est le cas à l'instant N) alors elles le sont encore à l'instant $k-1$.

Soit R^{k-2} la probabilité conditionnelle universelle pour $\mathcal{Y}_{k-1}$ relativement à $(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_{k-2})$ construite au lemme II.3.1 du paragraphe II (R^{-1} étant la probabilité sur $\mathcal{Y}$ image de P_0 par $\mathcal{Y}_0$)

Les fonctions de Bellman ${}^*C_{k-1}$ et ${}^*C_{k-1}$ sont définies par les équations suivantes (cf. lemme III.5.1 du chapitre 5) :

$$(III.10) \quad \begin{aligned} {}^*C_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) &= {}^*M_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) \\ &+ \int_{\mathcal{Y}} \tilde{C}_k^+(y^{k-2}, y_{k-1}, u^{k-1}) R^{k-2}(y^{k-2}, u^{k-1}; dy_{k-1}) \end{aligned}$$

$$(III.11) \quad \begin{aligned} {}^*C_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) &= {}^*M_{k-1}(y^{k-2}, u^{k-1}) \\ &+ \int_{\mathcal{Y}} \tilde{C}_k^-(y^{k-2}, y_{k-1}, u^{k-1}) R^{k-2}(y^{k-2}, u^{k-1}; dy_{k-1}) \end{aligned}$$

où $\tilde{C}_k^+$ et $\tilde{C}_k^-$ sont les parties positive et négative de :

$$\tilde{C}_k(y^{k-1}, u^{k-1}) = C_k[y^{k-1}, u^{k-1}, \hat{y}_k^+(y^{k-1}, u^{k-1}), \hat{y}_k^-(y^{k-1}, u^{k-1})]$$

et où ${}^*M_{k-1}$ et ${}^*M_{k-1}$ sont finies, comme on l'a vu en première partie.

Soient $\tilde{\Lambda}_{k-1}^+$ et $\tilde{\Lambda}_{k-1}^-$ les parties semi-définie positive et semi-définie négative de l'opérateur symétrique $\tilde{\Lambda}_{k-1}$ construit en deuxième partie (formule (III.9)).

$$\text{Soient } a_k^+ \begin{cases} = a_k & \text{si } a_k \geq 0, \text{ et} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad a_k^- \begin{cases} = a_k & \text{si } a_k \leq 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} {}^o\tilde{C}_k &= \|\hat{X}_{k-1} + \Delta_{k-1} \cdot (y_{k-1} - H_{k-1} \cdot \hat{X}_{k-1})\|_{\tilde{\Lambda}_{k-1}^+}^2 + a_k^+ \\ {}^o\tilde{C}_k &= \|\hat{X}_{k-1} + \Delta_{k-1} \cdot (y_{k-1} - H_{k-1} \cdot \hat{X}_{k-1})\|_{\tilde{\Lambda}_{k-1}^-}^2 + a_k^- \end{aligned}$$

Etant donné l'expression de $\tilde{C}_k$ obtenue en deuxième partie (formule (III.8)), on a évidemment :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k^+ &\leq {}^o\tilde{C}_k \\ \tilde{C}_k^- &\leq {}^o\tilde{C}_k \\ \tilde{C}_k^+ - \tilde{C}_k^- &= {}^o\tilde{C}_k - {}^o\tilde{C}_k = \tilde{C}_k \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème II,4.1 du paragraphe II (formules (II.8) et (II.9)) :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Y}} \hat{X}_{k-1} \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Delta_{k-1} (y_{k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) = 0 \\ &\int_{\mathcal{Y}} \|\Delta_{k-1} \cdot (y_{k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1})\|_{\tilde{\Lambda}_{k-1}^+}^2 R^{k-2}(dy_{k-1}) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \|y_{k-1}\|_{\Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Delta_{k-1}}^2 - 2 \hat{X}_{k-1}' \cdot H_{k-1}' \cdot \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Delta_{k-1} \cdot y_{k-1} \right. \\ &\quad \left. + \hat{X}_{k-1}' \cdot H_{k-1}' \cdot \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Delta_{k-1} \cdot H_{k-1} \cdot \hat{X}_{k-1} \right\} R^{k-2}(dy_{k-1}) \end{aligned}$$

$$= \text{tra} \{ \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Delta_{k-1} \cdot (H_{k-1} \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}' + B_{k-1} \cdot B_{k-1}') \}$$

D'où, en remarquant que par définition de Δ_{k-1} :

$$\Delta_{k-1} \cdot (H_{k-1} \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}' + B_{k-1} \cdot B_{k-1}') = \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}'$$

on déduit :

$$(III.12) \quad \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) \\ = \|\hat{X}_{k-1}\|^2 \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ + \text{tra} \{ \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^+ \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}' \} + a_k^+$$

De même :

$$(III.13) \quad \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) \\ = \|\hat{X}_{k-1}\|^2 \tilde{\Lambda}_{k-1}^- + \text{tra} \{ \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1}^- \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}' \} + a_k^-$$

On a donc, d'après (III.10) et (III.11) :

$$\begin{aligned} {}^*C_{k-1} &\leq {}^*M_{k-1} + \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) < +\infty \\ {}^*C_{k-1} &\leq {}^*M_{k-1} + \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) < +\infty \\ C_{k-1} &= {}^*C_{k-1} - {}^*C_{k-1} = {}^*M_{k-1} - {}^*M_{k-1} \\ &\quad + \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) - \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) \end{aligned}$$

La dernière égalité s'écrit d'après l'expression de $M_{k-1} = {}^*M_{k-1} - {}^*M_{k-1}$ obtenue en première partie (formules (III.5) et (III.6)), et les expressions de :

$$\int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{Y}} {}^0\tilde{C}_k(y_{k-1}) R^{k-2}(dy_{k-1})$$

qu'on vient de calculer (formules (III.12) et (III.13)) :

1 - pour $k \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{k-1} &= \|\hat{X}_{k-1}\|^2 (D_{k-1} + \tilde{\Lambda}_{k-1}) + \|u_{k-1}^1\|_{E_{k-1}^1}^2 - \|u_{k-1}^2\|_{E_{k-1}^2}^2 \\ &\quad + \text{tra}(D_{k-1} \cdot \Xi_{k-1}) + \text{tra} \{ \Delta_{k-1}' \cdot \tilde{\Lambda}_{k-1} \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1}' \} + a_k \end{aligned}$$

qui n'est autre que la formule (III.7), écrite pour $k-1$:

$$C_{k-1} = \|\hat{X}_{k-1}\|^2 \Lambda_{k-1} + \|u_{k-1}^1\|_{E_{k-1}^1}^2 - \|u_{k-1}^2\|_{E_{k-1}^2}^2 + a_{k-1}$$

où Λ_{k-1} est défini par :

$$\Lambda_{k-1} = D_{k-1} + \tilde{\Lambda}_{k-1}$$

c'est-à-dire par la formule (III.1), écrite pour $k-1$:

$$\Lambda_{k-1} = D_{k-1} + F_{k-1}' \cdot \Lambda_k \cdot F_{k-1} - F_{k-1}' \cdot \Lambda_k \cdot G_k \cdot [E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k]^{-1} G_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_{k-1}$$

et où a_{k-1} est définie par :

$$a_{k-1} = a_k + \text{tra} \{ D_{k-1} \cdot \Xi_{k-1} \} + \text{tra} \{ \tilde{\Lambda}_{k-1} \cdot \Xi_{k-1} \cdot H_{k-1} \cdot \Delta_{k-1}' \}$$

2 - pour $k=1$:

$$C_0 = \|\hat{X}_0\|^2 \Lambda_0 + a_0$$

cette formule permettant de calculer éventuellement le coût total pour la politique $\{(\hat{y}_1^1, \hat{y}_1^2), \dots, (\hat{y}_N^1, \hat{y}_N^2)\}$

Quatrième Partie

Au cours des trois premières parties, nous avons montré que les hypothèses du théorème III,5.2 du chapitre 5 étaient satisfaites. Ses conclusions, qui ne sont autres que les conclusions 2), 3), 4) et 5) du théorème que nous voulons montrer sont donc réalisées.

Mais tout cela n'est vrai que moyennant la condition 1), peu facile à vérifier. Il est donc intéressant de montrer que l'hypothèse supplémentaire 6), directement liée aux données du problème, implique cette condition 1).

Supposons donc cette hypothèse 6) vérifiée et supposons de plus que $\Lambda_k \leq 0$ (c'est vrai pour $k=N$ puisque $\Lambda_N = D_N \leq 0$ d'après l'hypothèse 6)). On en déduit immédiatement la première partie de la condition 1):

$$E_k^2 - G_k^2 \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 > 0$$

puisque, par hypothèse, $E_k^2 > 0$.

D'autre part, $-\Lambda_k$ étant symétrique semi-défini positif, peut s'écrire :

$$-\Lambda_k = (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'}$$

où $(-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Or, d'après une identité matricielle bien connue (cf. par exemple Aoki [1], p. 79, appendice D) :

$$\begin{aligned} I &= (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^2 \cdot [E_k^2 + G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \cdot G_k^2]^{-1} \cdot G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \\ &= [I + (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^2 \cdot (E_k^2)^{-1} \cdot G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'}]^{-1} \end{aligned}$$

(l'opérateur du deuxième membre est bien défini, comme inverse d'un opérateur défini positif).

D'où :

$$\begin{aligned} E_k^1 + G_k^1 \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 + G_k^1 \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 [E_k^2 - G_k^2 \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2]^{-1} G_k^2 \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 \\ = E_k^1 - G_k^1 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot \{ I - (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^2 \cdot [E_k^2 + G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \cdot G_k^2]^{-1} \cdot G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \} \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \cdot G_k^1 \\ = E_k^1 - G_k^1 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} [I + (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^2 \cdot (E_k^2)^{-1} \cdot G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'}]^{-1} \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \cdot G_k^1 \end{aligned}$$

ou encore, toujours d'après la même identité matricielle :

$$\begin{aligned} = \left\{ (E_k^1)^{-1} + (E_k^1)^{-1} \cdot G_k^1 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \cdot [I + (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^2 \cdot (E_k^2)^{-1} \cdot G_k^2 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} - (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot G_k^1 \cdot (E_k^1)^{-1} \cdot G_k^1 \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'}]^{-1} \right. \\ \left. \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} \cdot G_k^1 \cdot (E_k^1)^{-1} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 6) :

$$I + (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}} \cdot [G_k^2 \cdot (E_k^2)^{-1} \cdot G_k^2 - G_k^1 \cdot (E_k^1)^{-1} \cdot G_k^1] \cdot (-\Lambda_k)^{\frac{1}{2}'} > 0$$

et par suite l'expression précédente a un sens, comme inverse d'un opérateur strictement défini positif et est elle-même strictement définie positive, ce qui prouve la deuxième partie de la condition 1):

$$(III.14) \quad E_k' + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k' + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k' [E_k' - G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k']^{-1} \cdot G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k' > 0$$

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que $\Lambda_k \leq 0$ implique $\Lambda_{k-1} \leq 0$.

Considérons l'expression :

$$\begin{aligned} & G_k \cdot (E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k)^{-1} \cdot G_k' \\ &= \begin{pmatrix} G_k^1, G_k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_k^1 + G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 & G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \\ G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 & -E_k^2 + G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_k^{1'} \\ G_k^{2'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant les notations de la deuxième partie :

$$\begin{aligned} \bar{E}_k^1 &= E_k^1 + G_k^{1'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 \\ \bar{E}_k^2 &= E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \\ T_k &= G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^1 \end{aligned}$$

cette expression s'écrit encore, d'après la formule d'inversion par blocs :

$$\begin{aligned} & G_k \cdot (E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k)^{-1} \cdot G_k' \\ &= \begin{pmatrix} G_k^1, G_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\bar{E}_k^1 + T_k \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k]^{-1} & [\bar{E}_k^1 + T_k \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k]^{-1} \cdot T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \\ (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k \cdot [\bar{E}_k^1 + T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k]^{-1} & -(\bar{E}_k^2)^{-1} + (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k \cdot [\bar{E}_k^1 + T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k]^{-1} \cdot T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_k^{1'} \\ G_k^{2'} \end{pmatrix} \\ &= -G_k^2 \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'} \\ &+ [G_k^1 + G_k^2 \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k] \cdot [\bar{E}_k^1 + T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k]^{-1} \cdot [T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'} + G_k^{1'}] \end{aligned}$$

d'où, puisque $\bar{E}_k^1 + T_k' \cdot (\bar{E}_k^2)^{-1} \cdot T_k > 0$ (relation (III.14))

$$\begin{aligned} & G_k \cdot (E_k + G_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k)^{-1} \cdot G_k' \\ & \gg -G_k^2 \cdot (E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Lambda_{k-1} &\leq D_{k-1} + F_k' \cdot \Lambda_k \cdot F_k + F_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \cdot [E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2]^{-1} \cdot G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \\ &\leq D_{k-1} + [F_k' + F_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \cdot (E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'}] \cdot \Lambda_k \\ &\quad \cdot [F_k + G_k^2 \cdot (E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k] \\ &\quad - F_k' \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2 \cdot (E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2)^{-1} \cdot E_k^2 \cdot (E_k^2 - G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot G_k^2)^{-1} \cdot G_k^{2'} \cdot \Lambda_k \cdot F_k \end{aligned}$$

d'où, puisque E_k^2 est défini positif et Λ_k est semi-défini négatif :

$$\Lambda_{k-1} \leq D_{k-1} \leq 0$$

C.Q.F.D.



IV - EXEMPLE DE PROCESSUS ALÉATOIRE A COMMANDE MARKOVIAN : CHAÎNE DE MARKOV DISCRÈTE A COMMANDE

IV,1. Introduction

On pourrait donner, comme exemple de processus de Markov à commande, le processus d'état de Kalman, décrit au paragraphe I et que l'on supposerait alors parfaitement observé (ce qui serait obtenu en faisant :

$X_k = Y_k$, $H_k = I$, $B_k = 0$ de sorte que $X_k = Y_k$). Le caractère markovien de ce processus est en effet une conséquence directe du théorème VI,2 du chapitre 2.

Il nous a semblé plus intéressant d'étudier un exemple de nature tout à fait différente, qui nous permettra d'illustrer les résultats généraux du chapitre 3 et les paragraphes des chapitres 2 et 5 relatifs aux processus de Markov à commande.

Là encore les résultats que nous présentons ne sont pas nouveaux dans leur principe (voir par exemple **Pallu de la Barrière** [24], chapitre 16).

Mais, d'une part, la présentation adoptée ici nous paraît plus satisfaisante que la présentation classique. Cette dernière consiste à se donner a priori une probabilité de transition à commande qui permet de construire pour chaque bouclage markovien, une chaîne de Markov ordinaire. Nous montrons, à l'aide des résultats du chapitre 3, que les chaînes de Markov ainsi obtenues peuvent s'interpréter comme des processus aléatoires à commande bouclée construits à partir d'un processus de Markov à commande par bouclages markoviens, et les probabilités de transition à commande comme des probabilités conditionnelles universelles par rapport à ce processus de Markov à commande.

D'autre part, dans l'exposé classique, on est naturellement amené, dans les problèmes d'optimisation, à ne considérer que les politiques markoviennes. Nous montrons ici, en utilisant le chapitre 5, que la politique optimale en horizon fini obtenue par la construction classique, est en fait optimale parmi toutes les politiques, markoviennes ou non.

IV,2. Construction d'une chaîne de Markov discrète à commande

Soient $(X, \mathcal{X})$ et $(U, \mathcal{U})$ deux espaces finis :

$$X = \{ 1, 2, 3, \dots, x, \dots, n \}$$

$$U = \{ 1, 2, 3, \dots, u, \dots, m \}$$

munis de leur σ -algèbre discrète $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{U} = \mathcal{P}(U)$.

Donnons nous une probabilité P_0 sur $(X, \mathcal{X})$. Il suffit pour cela de se donner un « vecteur stochastique » de dimension n :

$$P_0 = \{ P_0(x) \} \quad x = 1, 2, \dots, n$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P_0(x) \leq 1 \\ \sum_{x=1}^n P_0(x) = 1 \end{array} \right.$$

et de poser pour tout $A \in \mathcal{X}$, nécessairement de la forme $A = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$ (où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$)

$$P_0(A) = \sum_{i=1}^p P_0(x_i)$$

Donnons nous de même pour $k=0, 1, 2, \dots$ des probabilités de transition (« à commande ») :

$$Q^k : (X, \mathcal{X}) \times (U, \mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(X, \mathcal{X})$$

Il suffit pour cela de se donner, pour chaque k , une famille de m « matrices stochastiques » de dimension $n \times n$:

$$Q^k(u) = \{ Q^k(x, u; \xi) \} \quad \begin{array}{l} x = 1, 2, \dots, n \\ \xi = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

avec

$$\begin{cases} 0 \leq Q^k(x, u; \xi) \leq 1 \\ \sum_{k=1}^n Q^k(x, u; \xi) = 1 \end{cases}$$

et de poser pour tout $A \in \mathcal{X}$, de la forme $A = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$

$$Q^k(x, u; A) = \sum_{i=1}^p Q^k(x, u; x_i)$$

Le théorème suivant rassemble, d'une part les résultats obtenus aux théorèmes IV.1 et IV.2.4 du chapitre 3, d'autre part ceux du théorème VI.3 du paragraphe VI du chapitre 2.

THEOREME IV.2.1

Il existe :

1 - un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

2 - un processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, à commandes dans $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$

3 - une suite $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ de probabilités de transition :

$$P^k : (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{k+1} \times (\mathcal{U}, \mathcal{U})^k \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

tels que :

4 - $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ constitue une suite régulière de probabilités conditionnelles, associée au processus aléatoire à commande $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$.

(selon la définition donnée au chapitre 2, paragraphe III).

5 - pour tous $A \in \mathcal{X}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_A [X_0(\omega)] P(d\omega) &= P_0(A) \\ \int_{\Omega} 1_A [X_{k+1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k+1})] P^k(x_0, x_1, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_k; d\omega) \\ &= Q^k(x_k, u_{k+1}; A) \end{aligned}$$

et par suite :

6 - pour tout $k \geq 0$, Q^k est une probabilité conditionnelle universelle pour X_{k+1} relativement à $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ (selon la définition du chapitre 2, paragraphe V).

7 - $(X_0, X_1, \dots, X_k, \dots)$ est un processus de Markov à commande.

Enfin :

8 - pour tout bouclage markovien défini par une suite $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots$ d'applications (forcément mesurables)

$$\beta_k : (\mathcal{X}, \mathcal{X}) \longrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

le processus à commande bouclée obtenu à partir de $X_0, \dots, X_k, \dots$ en posant :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{X}_0(\omega) &= X_0(\omega) \\ \bar{X}_1(\omega) &= X_1[\omega, \beta_1(\bar{X}_0(\omega))] \\ &\vdots \\ \bar{X}_k(\omega) &= X_k[\omega, \beta_1(\bar{X}_0(\omega)), \beta_2(\bar{X}_1(\omega)), \dots, \beta_k(\bar{X}_{k-1}(\omega))] \end{aligned} \right.$$

est une chaîne de Markov discrète ordinaire de matrices de transition :

$$\bar{Q}^0, \bar{Q}^1, \dots, \bar{Q}^k, \dots$$

où

$$\bar{Q}^k = \left\{ Q^k [x, \beta_{k+1}(x); \xi] \right\}_{\substack{x=1,2,\dots,n \\ \xi=1,2,\dots,n}}$$

(pour la construction détaillée de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de $\{X_k\}$ et des P^k voir chapitre 3).

REMARQUE IV,2.2

On pourra trouver dans la note de **Valadier** [27] une construction permettant de considérer une chaîne de Markov discrète à commande comme un processus aléatoire à commande défini par une équation d'évolution à bruit sans mémoire (voir chapitre 2 : alinéas I,2 et VI,2).

Cela prouve en particulier que le problème posé au paragraphe I du chapitre 3 peut avoir plusieurs solutions.

IV,3. Optimisation d'un système markovien discret (en horizon fini)

Supposons la chaîne de Markov discrète à commande $\{X_k\}$ construite à l'alinéa IV,2, d'horizon fini, égal à N . Considérons la comme un processus d'état et associons lui un processus de coût $\{L_k\}$ défini par :

$$L_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k) = d_k [X_{k-1}(\omega, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}), X_k(\omega, u_1, u_2, \dots, u_k), u_k]$$

pour $k=1, 2, \dots, N$ et :

$$L_0(\omega) = d_0 [X_0(\omega)]$$

d_k étant une fonction réelle sur $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ définie par la donnée de la famille de m matrices $n \times n$:

$$D_k(u) = \left\{ d_k(x, \xi, u) \right\}_{\substack{x=1,2,\dots,n \\ \xi=1,2,\dots,n}}$$

et d_0 étant une fonction réelle sur $\mathcal{X}$, définie par la donnée du vecteur $D_0 = \{d_0(\xi)\}_{\xi=1,2,\dots,n}$

On supposera d_k positif (de toute façon d_k est borné).

Le couple $\{X_k, L_k\}$ constitue bien un système markovien (suivant la définition du paragraphe IV du chapitre 5) que nous supposerons parfaitement observé.

Supposons que l'espace de commande $\mathcal{U}$ soit le produit de deux espaces $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont forcément eux-mêmes finis et de cardinal m_1 et m_2 tels que $m_1 + m_2 = m$

$\mathcal{U}_1$ sera considéré comme l'espace des commandes de poursuite, $\mathcal{U}_2$ comme celui des commandes d'évasion. Les composantes de $u_k \in \mathcal{U}$ suivant $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ seront notées u_k^1 et u_k^2 .

Nous cherchons une politique de poursuite optimale et accessoirement sa politique d'évasion conjuguée, conformément aux définitions du paragraphe II du chapitre 5, mais dans le cadre particulier des processus de Markov à commande parfaitement observés étudiés au paragraphe IV du chapitre 5.

THEOREME IV,3.1

Soient $\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1$ les applications de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{U}_1$ et $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_N^2$ les applications de $\mathcal{X} \times \mathcal{U}_1$ dans $\mathcal{U}_2$ construites par récurrence rétrograde, en posant successivement pour $k=N, N-1, \dots, 2, 1$:

$$(IV.1) \quad \begin{aligned} \Gamma_k(x, u) &= \sum_{\xi \in \mathcal{X}} Q^{k-1}(x, u; \xi) \cdot d_k(x, \xi, u) \\ &+ \sum_{\xi \in \mathcal{X}} Q^{k-1}(x, u; \xi) \Gamma_{k+1}[\xi, \tilde{\beta}_{k+1}^1(\xi), \theta_{k+1}^2(\xi, \tilde{\beta}_{k+1}^1(\xi))] \end{aligned}$$

avec :

$$\Gamma_{N+1} = 0$$

$$(IV.2) \quad \Gamma_k [x, u^1, \theta_k^2(x, u^1)] = \max_{u^2 \in U_2} \Gamma_k(x, u^1, u^2)$$

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} & \Gamma_k [x, \tilde{\beta}_k^1(x), \theta_k^2(x, \tilde{\beta}_k^1(x))] \\ &= \min_{u^1 \in U_1} \Gamma_k [x, u^1, \theta_k^2(x, u^1)] \end{aligned}$$

Soient $\hat{\beta}_1^2, \hat{\beta}_2^2, \dots, \hat{\beta}_N^2$ les applications de X dans U_2 définies par :

$$\hat{\beta}_k^2(x) = \theta_k^2[x, \tilde{\beta}_k^1(x)]$$

Alors :

- la politique de poursuite markovienne $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ est optimale (parmi toutes les politiques de poursuite, markoviennes ou non)
- la politique d'évasion markovienne $(\hat{\beta}_1^2, \hat{\beta}_2^2, \dots, \hat{\beta}_N^2)$ est la conjuguée de $(\tilde{\beta}_1^1, \tilde{\beta}_2^1, \dots, \tilde{\beta}_N^1)$ (parmi toutes les politiques d'évasion, markoviennes ou non).

DÉMONSTRATION :

Ce théorème n'est autre que le corollaire IV.1 du chapitre 5 écrit ici en tenant compte du fait que, puisque X et U sont finis, l'existence et la mesurabilité des applications $\tilde{\beta}_k^1$ et θ_k^2 vérifiant les relations (IV.1), (IV.2) et (IV.3) ne fait pas de doute.

C.Q.F.D



CONCLUSION

A partir d'une définition, à la fois précise et générale, de la notion de processus aléatoire à commande, nous avons établi un certain nombre de résultats théoriques généraux qui éclairent d'un nouveau jour les divers exemples étudiés jusqu'à présent.

Nous nous sommes intéressés particulièrement aux phénomènes probabilistes assez complexes dus au bouclage de la commande. Nous avons notamment pu montrer un théorème d'existence, et donner des méthodes de construction, pour des probabilités conditionnelles « universelles » dont les propriétés permettent d'éliminer les ambiguïtés liées trop souvent aux probabilités conditionnelles « à commande » dont on ne sait jamais très bien si la commande est un paramètre ou une variable aléatoire. Nous avons mis en évidence les intéressantes applications de ces probabilités conditionnelles universelles en théorie de l'optimisation : elles donnent en effet la possibilité d'employer des techniques de programmation dynamique pour les systèmes stochastiques, sans devoir sacrifier, comme c'était souvent le cas, la rigueur à la généralité ou vice versa.

Le modèle de processus aléatoire à commande, que nous avons utilisé pour développer les considérations précédentes est extrapolé du modèle classique avec équation d'évolution et équation d'observation. Il était important de vérifier, comme nous l'avons fait, que, pour certains systèmes dont l'évolution est décrite non plus par une équation mais par des probabilités de transition paramétrées par la commande, l'état peut également s'interpréter comme un processus aléatoire à commande, les probabilités de transition apparaissant alors comme des probabilités conditionnelles universelles. Ainsi nous avons pu traiter, au moyen de la même théorie générale, deux exemples classiques de systèmes stochastiques à commande aussi différents que les systèmes linéaires à bruits gaussiens indépendants et coût quadratique d'une part, et les systèmes markoviens discrets d'autre part.

Les problèmes mathématiques qui ont été abordés et résolus dans cette publication nous ayant été suggérés par la théorie de la commande optimale stochastique, nous n'avons envisagé que les applications de nos résultats dans ce domaine. Cependant, il n'est pas interdit de penser que certains d'entre eux peuvent intéresser d'autres spécialités, notamment la théorie de la décision.



Annexe

RAPPELS ET COMPLÉMENTS DE THÉORIE DES PROBABILITÉS

Nous avons rassemblé ici les principales définitions et principaux résultats de théorie des probabilités dont nous avons besoin. Pour la plupart d'entre eux, nous aurions pu nous contenter d'un simple renvoi aux ouvrages de **Neveu** [23] ou **Meyer** [21]. Nous avons préféré une rédaction un peu plus étoffée, car nous pensons fournir de la sorte une bonne introduction aux nouvelles notions et aux méthodes de démonstration développées dans notre exposé.

I - ESPACES DE MESURE - APPLICATIONS MESURABLES ET INTÉGRABLES

Nous commençons par redonner brièvement les définitions de base de la Théorie de la Mesure. Nous avons préféré, comme on le fait habituellement en Théorie des Probabilités, la présentation ensembliste à la présentation fonctionnelle de la notion de mesure (voir **Neveu** [23], **Halmos** [14], **Dunford et Schwartz** [11], chap. III pour la théorie ensembliste, **Bourbaki** [8], livre VI, **Dieudonné** [9], chap. 13, pour la théorie fonctionnelle). Les définitions de l'une n'étant pas toujours exactement équivalentes aux définitions correspondantes de l'autre, nous pensons que les rappels qui suivent permettront d'éviter toute ambiguïté quant au sens des termes que nous employons.

Nous appelons *espace mesurable* (ou *espace probabilisable*) un ensemble Ω muni d'une σ -algèbre ou tribu $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire d'une famille de parties de Ω , contenant Ω et stable par complémentation et intersection dénombrable). Si Ω est un espace topologique, on appelle σ -algèbre de Borel de Ω la plus petite σ -algèbre $\mathcal{B}(\Omega)$ contenant les ensembles ouverts (on dira : « engendrée » par les ouverts).

Le produit de deux espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Theta, \mathcal{G})$ est l'espace mesurable $(\Omega \times \Theta, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ constitué par l'ensemble $\Omega \times \Theta$ produit cartésien de Ω et Θ , muni de la σ -algèbre produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ ou plus petite σ -algèbre contenant les pavés mesurables $F \times G$ où $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$.

Une application X d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ sera dite *mesurable* si pour tout $A \in \mathcal{X}$ on a :

$$X^{-1}(A) \triangleq \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in A \} \in \mathcal{F}$$

On dira encore que X est une *variable aléatoire* sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Lorsque nous parlons de fonctions mesurables ou de variables aléatoires réelles, il est entendu implicitement qu'il s'agit de fonctions à valeurs dans la droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ muni de sa σ -algèbre de Borel $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Une fonction réelle *étagée* sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction X de la forme :

$$X(\cdot) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{F_i}(\cdot)$$

où α_i est réel fini, $F_i \in \mathcal{F}$ et où 1_{F_i} est l'indicatrice de F_i , égale à 1 sur F_i et à 0 sur son complémentaire F_i^c .

Une telle fonction est évidemment mesurable. Toute fonction réelle positive mesurable est limite (au sens de la convergence simple) d'une suite croissante de fonctions réelles positives étagées (voir **Neveu** [23], chap. II, proposition II,2.4).

Une *mesure* μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application : $\mu : \mathcal{F} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ non identiquement infinie, telle que, pour toute suite $\{F_n\}$ finie ou infinie dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, on ait :

$$\mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mu(F_n) \quad (\text{propriété de } \sigma\text{-additivité})$$

Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est *positive* si $\mu(F) \geq 0$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ et σ -finie s'il existe une suite $\{\Omega_n\}$, finie ou dénombrable, d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ et $\mu(\Omega_n) < +\infty$ pour tout n .

Une probabilité P sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une mesure positive telle que $P(\Omega) = 1$.
Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une mesure μ (respectivement d'une probabilité P) est appelé *espace de mesure*, ou mesuré (respectivement *espace de probabilité* ou probabilisé).

Comme exemple de mesure citons la *mesure de Lebesgue* définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de sa σ -algèbre de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en posant pour tout segment semi-ouvert $[a, b[$:

$$\mu([a, b[) = b - a$$

Parmi les diverses façons de définir l'*intégrale* (encore appelée *espérance* dans le cas d'une probabilité) rappelons brièvement la suivante, simple et commode quand on se limite à l'intégration de fonctions réelles.

1 - Si X est une fonction réelle positive étagée $X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{F_i}$, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une mesure positive μ , on appelle intégrale de X :

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(F_i) \quad \text{avec la convention} \quad 0 \times \infty = 0$$

2 - Si X est une fonction réelle positive mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on appelle intégrale de X :

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega)$$

où $\{X_n\}$ est une suite croissante de fonctions positives étagées qui converge simplement vers X .

3 - Si X est une fonction réelle mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on appelle intégrale de X , à condition qu'elle ait un sens, la différence :

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} X^+(\omega) \mu(d\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) \mu(d\omega)$$

où X^+ et X^- sont les parties positive $X^+ = \sup(X, 0)$ et négative $X^- = -\inf(X, 0)$ de X .

La fonction X est dite *quasi-intégrable* si son intégrale peut être définie (c'est-à-dire si l'une au moins de X^+ ou X^- a une intégrale finie). Elle est dite *intégrable* si sa valeur absolue $|X|$ a une intégrale finie (X est alors quasi intégrable et son intégrale est elle-même finie).

(pour plus de détails voir **Halmos** [14], chap. 5 et **Neveu** [23], parag. II.3).

II - CLASSE σ -ADDITIVE DE SOUS ENSEMBLES

Etant donné un ensemble Ω , on dit qu'une classe $\mathcal{S}$ de parties de Ω constitue une classe σ -additive si et seulement si :

1. $\Omega \in \mathcal{S}$
2. si A et $B \in \mathcal{S}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B \in \mathcal{S}$.
3. si A et $B \in \mathcal{S}$ et $A \supset B$, alors $A - B \in \mathcal{S}$
4. si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ où $A_n \in \mathcal{S} \forall n$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$

Le principal intérêt des classes σ -additives réside dans le résultat suivant.

LEMME II.1

Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de Ω stable par intersection finie. Si $\mathcal{S}$ est une classe σ -additive contenant $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}$ contient la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION :

Remarquons d'abord que $\mathcal{C}$ contient en particulier Ω , qui est l'intersection de la partie vide de $\mathcal{C}$.

Soit d'autre part $\mathcal{F}$ l'intersection de toutes les classes σ -additives contenant $\mathcal{C}$. Visiblement $\mathcal{F}$ est encore une classe σ -additive contenant $\mathcal{C}$ et elle est contenue dans $\mathcal{S}$. De plus, toute σ -algèbre étant une classe σ -additive $\mathcal{F}$ est contenue dans la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{C}$.

Considérons alors la classe $\mathcal{G}$ de parties de Ω :

$$\mathcal{G} = \left\{ A \subset \Omega : A \cap C \in \mathcal{F} \forall C \in \mathcal{C} \right\}$$

C'est une classe σ -additive ; en effet :

1. $\Omega \in \mathcal{G}$ car $C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 2. si $A \cap C \in \mathcal{F}$ et $B \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 et si $A \cap B = \emptyset$ alors $(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$
 et par suite $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 c'est-à-dire $A \cup B \in \mathcal{G}$
 3. si $A \cap C \in \mathcal{F}$ et $B \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 et si $A \supset B$, alors $(A \cap C) \supset (B \cap C)$ et par suite
 $(A \cap C) - (B \cap C) = (A - B) \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 c'est-à-dire $A - B \in \mathcal{G}$
 4. si $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ avec $A_n \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$
 alors $(A_1 \cap C) \subset (A_2 \cap C) \dots \subset (A_n \cap C) \subset (A_{n+1} \cap C) \dots$ et par suite $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap C \in \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$ c'est-à-dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$
- D'autre part $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{C}$, car $A \in \mathcal{C}$ implique $A \cap C \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ quel que soit $C \in \mathcal{C}$, et par suite $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{F}$, par définition de $\mathcal{F}$.
- Enfin $\mathcal{G}$ est contenu dans $\mathcal{F}$ car, par définition de $\mathcal{G}$, si $A \in \mathcal{G}$ alors, puisque $\Omega \in \mathcal{C}$, on a $A \cap \Omega = A \in \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}$

Considérons maintenant la classe de parties de Ω :

$$\mathcal{H} = \left\{ A \subset \Omega : A \cap F \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F} \right\}$$

On peut montrer, exactement comme pour la classe $\mathcal{G}$, que $\mathcal{H}$ est une classe σ -additive.

De plus $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{C}$; en effet si $C \in \mathcal{C}$ alors, par définition de $\mathcal{G}$, $A \cap C \in \mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{G}$ c'est-à-dire, puisque $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. $\mathcal{H}$ contient donc $\mathcal{F}$ par définition de $\mathcal{F}$.

D'autre part, $\mathcal{H}$ est contenu dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire dans $\mathcal{F}$, car si $A \cap F \in \mathcal{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ à plus forte raison $A \cap C \in \mathcal{F}$ pour tout $C \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Par suite $\mathcal{H} = \mathcal{F}$

Ce dernier résultat signifie que, quel que soit $A \in \mathcal{F}$ on a $A \cap F \in \mathcal{F}$ quel que soit $F \in \mathcal{F}$ c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie.

$\mathcal{F}$ étant par ailleurs une classe σ -additive est une σ -algèbre contenant $\mathcal{C}$ et par conséquent la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE II.2

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable quelconque, P_1 et P_2 deux probabilités définies sur $\mathcal{F}$. Supposons $\mathcal{F}$ engendrée par une classe $\mathcal{C}$ stable par intersection finie.

Si P_1 et P_2 coïncident sur $\mathcal{C}$, alors P_1 et P_2 coïncident sur tout $\mathcal{F}$.

DEMONSTRATION :

Soit $\mathcal{G}$ la classe des éléments G de $\mathcal{F}$ tels que : $P_1(G) = P_2(G)$.

$\mathcal{G}$ est une classe σ -additive, autrement dit :

1. $\Omega \in \mathcal{G}$ car $P_1(\Omega) = P_2(\Omega) = 1$

2. si G et $H \in \mathcal{G}$ et $G \cap H = \emptyset$ alors $G \cup H \in \mathcal{G}$ car :

$$\begin{aligned} P_1(G \cup H) &= P_1(G) + P_1(H) \\ &= P_2(G) + P_2(H) = P_2(G \cup H) \end{aligned}$$

3. si G et $H \in \mathcal{G}$ et $G \supset H$ alors $G - H \in \mathcal{G}$ car :

$$\begin{aligned} P_1(G - H) &= P_1(G) - P_1(H) \\ &= P_2(G) - P_2(H) = P_2(G - H) \end{aligned}$$

4. si $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \dots$ avec $G_n \in \mathcal{G} \quad \forall n$ alors

$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}$ car :

$$\begin{aligned} P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(G_n) = P_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{C}$ qui est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{F}$. On en déduit que

$\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ c'est-à-dire $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

C.Q.F.D.

Les résultats précédents sont énoncés dans Neveu [23] (page 19, exercice I,4.5). Ils n'y figurent cependant qu'à titre d'exercice ; on a donc cru utile d'en donner ici une démonstration complète, étant donné l'emploi répété qui en est fait dans notre exposé.

III - PROBABILITÉ DE TRANSITION

Etant donné deux espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, on appelle *probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$* et on note :

$$P : (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

une application P de l'ensemble produit $\mathcal{Y} \times \mathcal{F}$ dans le segment $[0,1]$ telle que

- 1 - pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé $P(y; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$
- 2 - pour tout $F \in \mathcal{F}$ fixé $P(\cdot; F)$ est une fonction réelle mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$
(cf. Neveu [23], III,2, p. 69).

Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est identique à $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ on dit aussi que P est un *noyau markovien* sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ (cf. Meyer [21] IX.1, p. 215).

La probabilité de transition de Dirac définie par :

$$P(y; B) = 1_B(y)$$

où 1_B est l'indicatrice de l'ensemble $B \in \mathcal{Y}$, constitue, comme on peut le vérifier aisément, un intéressant exemple de probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans lui-même.

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour qu'une famille de probabilités constitue une probabilité de transition.

LEMME III,1

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ deux espaces mesurables. Supposons $\mathcal{F}$ engendrée par une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω , stable par intersection finie.

Si P est une application de $\mathcal{Y} \times \mathcal{F}$ dans le segment $[0,1]$ telle que :

- 1 - pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé, $P(y; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$
- 2 - pour tout $C \in \mathcal{C}$ fixé, $P(\cdot; C)$ est une fonction réelle mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$
alors P est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

DÉMONSTRATION :

Soit $\mathcal{G}$ la classe des éléments G de $\mathcal{F}$ tels que $P(\cdot; G)$ soit une fonction mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$

1 - $\Omega \in \mathcal{G}$ puisque $P(y; \Omega) = 1$ pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

2 - $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{G}$ avec $G \cap H = \emptyset$ implique $G \cup H \in \mathcal{G}$; en effet :
$$P(y; G \cup H) = P(y; G) + P(y; H)$$

3 - $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{G}$ et $G \supset H$ implique $G - H \in \mathcal{G}$; en effet :
$$P(y; G - H) = P(y; G) - P(y; H)$$

4 - si $G_1, G_2, \dots, G_n, G_{n+1}, \dots$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}$
car :
$$P(y; \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow P(y; G_n) \text{ pour tout } y \in \mathcal{Y}$$

$\mathcal{G}$ est donc une classe σ -additive. Comme $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{C}$ par hypothèse, d'après le lemme II,1, $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{F}$ et par suite $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Le théorème de Fubini admet une très intéressante généralisation, utilisant les probabilités de transition (cf. **Neveu** [23], proposition III,2.1, p. 69 ou **Meyer** [21], II.14, p. 34). Nous en rappelons ci-dessous l'énoncé :

THÉOREME III,2

Etant donné un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{X}, Q)$ et une probabilité de transition P de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$, il existe une probabilité unique R définie sur l'espace produit $(\mathcal{X} \times \Omega, \mathcal{X} \otimes \mathcal{F})$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{X}$ et tout $F \in \mathcal{F}$:

$$R(A \times F) = \int_{\mathcal{X}} 1_A(x) P(x; F) Q(dx)$$

De plus, pour toute fonction réelle positive mesurable φ définie sur $(\mathcal{X} \times \Omega, \mathcal{X} \otimes \mathcal{F})$ la fonction Ψ définie sur $\mathcal{X}$ en posant pour tout

$$\Psi(x) = \int_{\Omega} \varphi(x, \omega) P(x; d\omega)$$

est positive, $\mathcal{X}$ -mesurable, et on a :

$$\int_{\mathcal{X}} \Psi(x) Q(dx) = \int_{\mathcal{X} \times \Omega} \varphi(x, \omega) R(dx \times d\omega)$$

REMARQUE

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, R est alors le produit $P \otimes Q$ des probabilités P et Q .



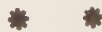
Ce théorème implique en particulier le corollaire suivant (cf. **Neveu** [23], III.2, corollaire 2, p. 71).

COROLLAIRE III,3

Dans les conditions du théorème III,2, la fonction réelle positive S définie sur $\mathcal{F}$ par :

$$S(F) = \int_{\mathcal{X}} P(x; F) Q(dx)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. (S est la projection de R sur $(\Omega, \mathcal{F})$)



Les résultats précédents permettent d'envisager diverses façons de construire des probabilités de transition. Ainsi, le corollaire III,3 peut être étendu de la manière suivante :

LEMME III,4 (composition de deux probabilités de transition)

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, $(\Omega, \mathcal{F})$ trois espaces mesurables et :

1 - P une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$

2 - Q une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$

Alors la fonction réelle positive S définie sur $\mathcal{F}$ par :

$$S(y; F) = \int_{\mathcal{X}} P(y, x; F) Q(y; dx)$$

pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $F \in \mathcal{F}$, est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

DÉMONSTRATION :

Pour $F \in \mathcal{F}$ fixé $P(\cdot, \cdot; F)$ est une fonction positive mesurable sur $(\mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{X})$.

D'après le théorème III,2, $S(\cdot; F)$ est donc une fonction positive mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

Pour $y \in \mathcal{Y}$ fixé, $Q(y; \cdot)$ est une probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $P(y, \cdot; \cdot)$ une probabilité de transition de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$. D'après le corollaire III,3 $S(y; \cdot)$ est donc une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$

C.Q.F.D.

Le corollaire suivant étend aux probabilités de transition la construction bien connue d'une probabilité comme image par une application mesurable d'une autre probabilité (cf. Meyer [21], II.11, p. 33).

COROLLAIRE III,5 (image d'une probabilité de transition par une application mesurable).

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{X}), (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}), (\Omega, \mathcal{F})$ trois espaces mesurables et :

- 1 - Φ une application mesurable de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$; on désigne par Φ_y l'application partielle $\Phi(y, \cdot)$, évidemment mesurable, de $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.
- 2 - Q une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Alors la fonction réelle positive S définie sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{F}$ par :

$$S(y; F) = Q[y; \Phi_y^{-1}(F)]$$

c'est-à-dire :

$$S(y; F) = \int_{\mathcal{X}} 1_F[\Phi(y, x)] Q(y; dx)$$

pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et $F \in \mathcal{F}$, est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

Pour toute fonction réelle positive mesurable L sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on a :

$$\int_{\Omega} L(\omega) S(y; d\omega) = \int_{\mathcal{X}} L[\Phi(y, x)] Q(y; dx)$$

quel que soit $y \in \mathcal{Y}$.

DÉMONSTRATION :

La fonction réelle positive P définie sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F}$ en posant pour $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ et $F \in \mathcal{F}$:

$$P(y, x; F) = 1_F[\Phi(y, x)]$$

est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X}, \mathcal{X})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

La première partie du corollaire est donc une conséquence du lemme III,4.

Quant à la seconde partie, elle est vraie par définition pour $L = 1_F$ quel que soit $F \in \mathcal{F}$. D'après les propriétés de linéarité et de convergence monotone séquentielle de l'intégrale elle est donc vraie pour L positive mesurable quelconque (Neveu [23], prop. II,3.3., p. 40 et prop. II,2.4, p. 34).

C.Q.F.D.

Les probabilités sont souvent définies par une densité de probabilité par rapport à une mesure. Cette construction peut s'étendre aux probabilités de transition (cf. Meyer, [21], IX.13, p. 221).

LEMME III,6 (probabilité de transition définie par une densité)

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ deux espaces mesurables, μ une mesure positive σ -finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et p une fonction réelle positive mesurable sur $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$ telle que, pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on ait :

$$\int_{\Omega} p(\omega, y) \mu(d\omega) = 1$$

Alors la fonction P définie en posant pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $F \in \mathcal{F}$:

$$P(y; F) = \int_{\Omega} 1_F(\omega) p(\omega, y) \mu(d\omega)$$

est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$.

DÉMONSTRATION :

Pour toute fonction mesurable positive φ sur $(\Omega \times \mathcal{Y}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y})$, la fonction ψ définie sur $\mathcal{Y}$ par :

$$\psi(y) = \int_{\Omega} \varphi(\omega, y) \mu(d\omega)$$

est $\mathcal{Y}$ -mesurable (voir Halmos [14], parag. 35, théorème A, p. 143, dans le cas où φ est l'indicatrice 1_H d'un ensemble $H \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{Y}$; d'après les propriétés de linéarité et de convergence monotone de l'intégrale, le résultat est encore vrai pour φ mesurable positive quelconque).

En prenant en particulier

$$\varphi(\omega, y) = 1_F(\omega) p(\omega, y)$$

on voit que, pour tout $F \in \mathcal{F}$ fixé, $P(\cdot; F)$ est une fonction mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$.

D'autre part, pour tout $y \in \mathcal{Y}$ fixé, il est clair que $P(y; \cdot)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (puisque en particulier $P(y; \Omega) = 1$).

C.Q.F.D.



IV - DERIVÉE DE RADON NICODYM

Il existe plusieurs versions du théorème de Radon Nicodym (voir par exemple **Neveu** [23], prop. IV,1.4, p. 105, **Dunford-Schwartz** [11], III.10.2, et **Halmos** [14], parag. 31, theorem B, p. 128). Nous rappelons ci-dessous l'énoncé de l'une des plus générales (voir **Halmos** [14], parag. 31, p. 131, exercice (7)).

THÉORÈME IV,1

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable muni de deux mesures positives λ et μ . Supposons λ σ -finie.

Si, pour tout $N \in \mathcal{Y}$ tel que $\lambda(N) = 0$, on a nécessairement $\mu(N) = 0$ (c'est-à-dire si μ est absolument continue par rapport à λ), alors il existe une fonction réelle positive mesurable f définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ unique à une égalité λ -presque partout près, telle que, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on ait :

$$\mu(B) = \int_{\mathcal{X}} 1_B(y) f(y) \lambda(dy)$$

Si μ est σ -finie, alors f peut être choisie finie.

DÉFINITION :

La classe des fonctions f définies à une égalité λ -presque partout près par le théorème IV,1 s'appelle *dérivée de Radon Nicodym* de la mesure μ par rapport à la mesure λ et se note $d\mu/d\lambda$ (μ est en effet l'intégrale de sa dérivée).

Par un abus de notation et de terminologie classique, on identifiera souvent la classe de λ -équivalence et un de ses représentants.

V - PROBABILITÉ CONDITIONNELLE RÉGULIÈRE

Rappelons qu'étant donné une variable aléatoire réelle positive L définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et une sous σ -algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, on appelle *espérance conditionnelle de L par rapport à $\mathcal{G}$* , et on note $E^{\mathcal{G}}(L)$ ou $E\{L/\mathcal{G}\}$ la dérivée de Radon Nicodým $d\mu_L/dP_{\mathcal{G}}$ de la mesure positive μ_L définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$ en posant pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\mu_L(G) = \int_{\Omega} 1_G(\omega) L(\omega) P(d\omega)$$

par rapport à la restriction $P_{\mathcal{G}}$ de P à $(\Omega, \mathcal{G})$. $E\{L/\mathcal{G}\}$ est donc la classe d'équivalence des variables aléatoires réelles positives M définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, P_{\mathcal{G}})$ telles que, pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\int_{\Omega} 1_G(\omega) L(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_G(\omega) M(\omega) P_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

ou encore la classe de $P_{\mathcal{G}}$ -équivalence des variables aléatoires réelles positives M définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ -mesurables et telles que, pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\int_{\Omega} 1_G(\omega) L(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_G(\omega) M(\omega) P(d\omega)$$

(cf. Neveu [23] définition IV.3.1, p. 114).

Nous utilisons souvent le critère suivant :

LEMME V.1

Soient L une variable aléatoire réelle positive intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ une sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par une classe $\mathcal{C}$ stable par intersection finie (et contenant en particulier Ω)

Pour qu'une variable aléatoire réelle positive M sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ -mesurable, soit un représentant de : $E\{L/\mathcal{G}\}$, il faut et il suffit que pour tout $C \in \mathcal{C}$:

$$\int_{\Omega} 1_C(\omega) L(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_C(\omega) M(\omega) P(d\omega)$$

DEMONSTRATION :

La condition est nécessaire puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

Elle est aussi suffisante, car la classe $\mathcal{J}$ des ensembles $A \in \mathcal{G}$ tels que :

$$\int_{\Omega} 1_A(\omega) L(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_A(\omega) M(\omega) P(d\omega)$$

qui contient $\mathcal{C}$ par hypothèse, est une classe σ -additive. En effet :

1. $\Omega \in \mathcal{C} \subset \mathcal{J}$ par hypothèse

2. $A, B \in \mathcal{J}$ et $A \cap B = \emptyset$ implique $A \cup B \in \mathcal{J}$ car :

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$$

3. $A, B \in \mathcal{J}$ et $A \supset B$ implique $A - B \in \mathcal{J}$ car :

$$1_{A-B} = 1_A - 1_B \text{ (et l'hypothèse que } L \text{ est intégrable évite les formes indéterminées } \infty - \infty \text{)}$$

4. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \dots$, $A_n \in \mathcal{J} \forall n$ implique $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$ car :

$$1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow 1_{A_n}$$

D'après le lemme II,1, $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{G}$.

C.Q.F.D.

Etant donné une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, on appelle *espérance conditionnelle par rapport à Y* d'une variable aléatoire réelle L sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et on note souvent $E\{L / Y\}$ l'espérance conditionnelle $E\{L / Y^{-1}(y)\}$ de L par rapport à la sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par Y .

Remarquons que l'espérance conditionnelle $E\{L / \mathcal{G}\}$ peut s'interpréter comme l'espérance conditionnelle de L par rapport à l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega, \mathcal{G})$.

Etant donné deux variables aléatoires X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ respectivement, nous appelons *probabilité conditionnelle de X par rapport à Y* , une fonction réelle positive Q définie sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$Q(\cdot, A) \in \frac{\partial \mu_A}{\partial P \cdot Y^{-1}}$$

$\partial \mu_A / \partial P \cdot Y^{-1}$ étant la dérivée de Radon Nicodým de la mesure μ_A définie sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ en posant pour tout $B \in \mathcal{Y}$

$$\mu_A(B) = \int_{\Omega} 1_B[Y(\omega)] 1_A[X(\omega)] P(d\omega)$$

par rapport à l'image $P \cdot Y^{-1}$ de P sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ définie par $(P \cdot Y^{-1})[B] = P[Y^{-1}(B)]$

Pour que Q soit une probabilité conditionnelle de X par rapport à Y , il faut et il suffit par conséquent que pour tout $A \in \mathcal{X}$:

$$Q[Y(\cdot), A] \in E\{1_A(X) / Y\}$$

Dans le cas particulier où X est l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans lui-même la probabilité conditionnelle de X par rapport à Y s'appellera simplement probabilité conditionnelle par rapport à Y .

Dans le cas particulier où, $\mathcal{G}$ étant une sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$, Y est l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega, \mathcal{G})$, la probabilité conditionnelle de X par rapport à Y s'appellera probabilité conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$.

Nous dirons qu'une probabilité conditionnelle Q de X par rapport à Y est *régulière* si c'est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Remarquons que pour tout $A \in \mathcal{X}$, $Q(\cdot, A)$ est une fonction positive mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. Mais si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est une suite finie ou infinie dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{X}$, l'égalité

$$Q(y, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(y, A_n)$$

n'est vraie qu'en dehors d'un sous ensemble $(P \cdot Y^{-1})$ -négligeable de $\mathcal{Y}$. Dire que Q est régulière, c'est affirmer que ce sous ensemble de $\mathcal{Y}$ est toujours vide.

Cette définition prolonge celle de Neveu [23], donnée dans le cas particulier où X est l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans lui-même et Y est l'application identique de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega, \mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ étant une sous σ -algèbre de $\mathcal{F}$. Le théorème d'existence de Neveu [23], V.4, p. 175, pour les probabilités conditionnelles régulières peut aussi se montrer en utilisant nos résultats du chapitre I (cf. III,5).

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour qu'une probabilité de transition soit une probabilité conditionnelle régulière.

LEMME V.2

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. Supposons $\mathcal{F}$ engendrée par une classe $\mathcal{C}$ stable par intersection finie.

Si P° est une probabilité de transition de $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que, pour tout $C \in \mathcal{C}$,
 $P^\circ [Y(\cdot); C]$ soit un représentant de l'espérance conditionnelle $E\{1_C / Y\}$
 alors P° est une probabilité conditionnelle régulière par rapport à Y .

DEMONSTRATION :

Soit $\mathcal{J}$ la classe des $F \in \mathcal{F}$ tels que, pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$\int_{\Omega} 1_B [Y(\omega)] 1_F(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} 1_B [Y(\omega)] P^\circ [Y(\omega); F] P(d\omega)$$

on voit que :

$$1. \quad \Omega \in \mathcal{J} \quad \text{car} \quad 1_{\Omega} = P^\circ [Y(\cdot); \Omega] = 1$$

$$2. \quad \text{si } A \in \mathcal{J}, B \in \mathcal{J} \text{ et } A \cap B = \emptyset \text{ alors } A \cup B \in \mathcal{J} \text{ car :}$$

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$$

$$\text{et : } P^\circ [Y(\cdot); A \cup B] = P^\circ [Y(\cdot); A] + P^\circ [Y(\cdot); B]$$

$$3. \quad \text{si } A \in \mathcal{J}, B \in \mathcal{J} \text{ et } A \supset B \text{ alors } A - B \in \mathcal{J} \text{ car :}$$

$$1_{A-B} = 1_A - 1_B$$

$$\text{et : } P^\circ [Y(\cdot); A - B] = P^\circ [Y(\cdot); A] - P^\circ [Y(\cdot); B]$$

$$4. \quad \text{si } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \dots \text{ avec } A_n \in \mathcal{J} \forall n \text{ alors } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$$

$$\text{car : } 1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow 1_{A_n}$$

$$\text{et : } P^\circ [Y(\cdot); \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow P^\circ [Y(\cdot); A_n]$$

$\mathcal{L}$ est donc une classe σ -additive qui, par hypothèse, contient la classe $\mathcal{C}$ stable par intersection et par suite la σ -algèbre qu'elle engendre, c'est-à-dire $\mathcal{F}$, d'après le lemme II,1.

C.Q.F.D.

Le principal intérêt des probabilités conditionnelles régulières réside dans le résultat suivant, qui découle immédiatement des propriétés de linéarité et de convergence monotone séquentielle de l'espérance conditionnelle d'une part (cf. Neveu [23] IV,3, p. 115), et de l'intégrale d'autre part (cf. Neveu [23], II.3.3, p. 40, et II,2.4, p. 34).

LEMME V.3

1 - Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. Supposons qu'il existe une probabilité conditionnelle régulière Q de X par rapport à Y . Soit φ une fonction positive mesurable définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et soit ψ la fonction réelle positive mesurable sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ obtenue en posant

$$\psi(y) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(x) Q(y; dx)$$

Alors $\psi[Y(\cdot)]$ est un représentant de l'espérance conditionnelle $E\{\varphi(X)/Y\}$

2 - En particulier, s'il existe une probabilité conditionnelle régulière P° par rapport à Y , et si L est une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire réelle positive M définie par :

$$M(\omega) = \int_{\mathcal{X}} L(\tilde{\omega}) P^\circ[Y(\omega); d\tilde{\omega}]$$

est un représentant de l'espérance conditionnelle $E\{L/Y\}$



RÉFÉRENCES

- [1] AOKI M. — *Optimization of Stochastic Systems : Topics in discrete-time systems*, Academic Press, New York, 1967.
- [2] AUMASSON C. — *Variables et processus aléatoires à commande*, C.R. Ac. des Sc., t. 271, série A (1970), p. 199-202. Gauthier Villars, Paris.
- [3] BELLMAN R.E. — *Dynamic programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957,
- [4] BELLMAN R.E. and DREYFUS S.E. — *Applied dynamic programming*, Princeton University Press, Princeton, 1962, trad. française : *La programmation dynamique et ses applications*, Dunod, Paris, 1965.
- [5] BLACKWELL D. — *Discounted dynamic programming*, Annals of Mathematical Statistics, vol. 36, 1965, p. 226-235.
- [6] BLEY K.B. — *Randomized and stochastic linear discrete differential games with quadratic pay off function*, U.C.L.A. ENG. 7023, (August 1970).
- [7] BOUDAREL R., DELMAS J. et GUICHET P. — *Commande optimale des processus (tome 3) : Programmation dynamique et ses applications*, Dunod, Paris, 1969.
- [8] BOURBAKI N. — *Elements de Mathématiques (livre VI) : Intégration*, Hermann, Paris, n° 1175 (2^e édition), n° 1244 (2^e édition), n° 1343, 1963-69.
- [9] DIEUDONNE J. — *Elements d'analyse*, Gauthier Villars, Paris. Tome 2 (1968), tome 3 (1970).
- [10] DREYFUS S.E. — *Dynamic programming and calculus of variations*, Math. in Science and Engineering, vol. 21, Academic Press, New York, 1965.
- [11] DUNFORD N. and SCHWARTZ J. — *Linear operators (Part I)*, Interscience Publishers, New York, 2nd print, 1964.
- [12] FLORENTIN J.J. — *Optimal control of continuous-time Markov stochastic systems*, J. on Electronics and Control, vol. 10, 1961, p. 473-488.
- [13] FLORENTIN J.J. — *Partial observability and optimal control*, J. on Electronics and Control, vol. 13, 1962, p. 263-279.
- [14] HALMOS P.R. — *Measure theory*, Van Nostrand, Princeton, 11th print, 1966.
- [15] HINDERER K. — *Foundations of non stationary dynamic programming with discrete time parameter*, Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [16] HOWARD R.A. — *Dynamic programming and Markov processes*, Wiley, New York, 1960.
- [17] KALMAN R.E. — *A new approach to linear filtering and prediction problems*, J. of Basic Engineering, trans. of A.S.M.E., vol. 82, p. 35-45, 1960.
- [18] KALMAN R.E. and BUCY R.S. — *New results in linear filtering and prediction theory*, J. of Basic Engineering, trans of A.S.M.E., vol. 83, p. 95-108, 1961.
- [19] KUSHNER H.J. — *Stochastic stability and control*, Math. in Science and Engineering, vol. 33, Academic Press, New York, 1967.
- [20] LANERY E. — *Etude asymptotique des systèmes markoviens à commande*, Revue Internationale de Recherche Opérationnelle, n° 5, 1967, p. 3-56.
- [21] MEYER P.A. — *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1966.
- [22] MORTENSEN R.E. — *Stochastic optimal control with noisy observations*, International J. of Control, 1st serie, vol. 4, n° 5, 1966, p. 455-464.
- [23] NEVEU J. — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964.
- [24] PALLU DE LA BARRIERE R. — *Cours d'automatique théorique*, Dunod, Paris, 1966.
- [25] STRAUCH R.E. — *Negative dynamic programming*, Annals of Mathematical Statistics, vol. 37, 1966, p. 871-890.

- [26] STRIEBEL C. - *Sufficient statistics in the optimal control of stochastic systems*. J. of Mathematical Analysis and Applications, vol. 12, 1965, p. 576-592.
- [27] VALADIER M. - *Sur la commande optimale stochastique en temps discret avec équation d'observation*. C.R. Ac. des Sc., t. 269, série A, 1969, p. 105-108, Gauthier Villars, Paris.
- [28] WONHAM W.M. - *Stochastic problems in optimal control*. R.I.A.S. TR 63-14, 1963.
- [29] WONHAM W.M. - *Lecture notes on stochastic control*. Lecture notes 67-2, Center for dynamical systems. Div. of Appl. Math., Brown University, 1967.
- [30] WONHAM W.M. - *Random differential equations in control theory*. Probabilistic methods in applied mathematics, vol. 2, edited by Barucha Reid A.T. - Academic Press, New York, 1970.
- [31] YOSHIKAWA T. - *An example of stochastic multistage games with noisy state observation*. IEEE transactions on automatic control, vol. AC-15, n° 4, 1970, p. 455-458.



SOMMAIRE

L'interdépendance entre les différents processus aléatoires (état, observation, commande, coût) qui interviennent dans un système stochastique à commande est de nature complexe. En effet, le coût est fonction de l'état, de la commande et parfois de l'observation ; l'observation est fonction de l'état et parfois de la commande ; l'évolution de l'état dépend de la commande ; la commande enfin est choisie à chaque instant en fonction des observations passées.

L'objet de cette publication est d'analyser, en temps discret, l'influence du choix de la commande sur les propriétés probabilistes de l'état, de l'observation et du coût, en utilisant le modèle mathématique très général des « processus aléatoires à commande », et d'examiner certaines applications des résultats obtenus à l'optimisation stochastique.

Dans le chapitre 1, nous prenons d'abord le cas simplifié du système non évolutif. Nous définissons la notion de « variable aléatoire à commande », dont la valeur dépend, mesurablement, à la fois d'une épreuve (c'est-à-dire de l'élément d'un espace de probabilité) et d'un paramètre, appelé commande. Etant donné une variable aléatoire, appelée observation, on peut construire, à partir d'une variable aléatoire à commande, une variable aléatoire ordinaire, en y prenant la commande fonction mesurable de l'observation. La nouvelle variable aléatoire ainsi obtenue, dite à commande adaptée à l'observation, dépend évidemment de la fonction de commande choisie. Nous montrons alors un théorème d'existence pour des probabilités conditionnelles régulières « généralisées », qui étend un résultat connu sur les probabilités conditionnelles régulières. Ces probabilités conditionnelles permettent de calculer, pour toute variable aléatoire positive, un représentant de l'espérance conditionnelle par rapport à l'observation et à la variable aléatoire à commande adaptée à cette observation, qui ne dépend de la fonction de commande choisie qu'au travers de la valeur prise par la commande. L'existence d'un tel représentant est souvent considérée plus ou moins implicitement comme acquise, mais elle est rarement démontrée, et, à notre connaissance, jamais sous des hypothèses aussi larges (aucune hypothèse d'indépendance stochastique notamment).

Au chapitre 2 nous étendons ces définitions et ces résultats aux systèmes évolutifs à temps discret. Nous définissons la notion de « processus aléatoire à commande », dont la valeur à un instant donné dépend mesurablement de l'épreuve et des commandes antérieures. En prenant, à chaque instant, la commande fonction mesurable des états passés du processus, on obtient un processus aléatoire ordinaire, dit à commande « bouclée ». En prenant la commande fonction mesurable des états passés d'un autre processus aléatoire à commande bouclée, on obtient aussi un processus aléatoire ordinaire, appelé alors processus aléatoire à commande « adaptée » (au second processus). Généralement, le processus d'observation est à commande bouclée, les processus d'état et de coût sont à commande adaptée au processus d'observation (qui peut être confondu avec le processus d'état, dans le cas de « l'observation exacte »). Nous montrons un théorème d'existence pour une « suite régulière » de probabilités conditionnelles, qui permet de calculer à tout instant des représentants d'espérances conditionnelles de variables aléatoires (ordinaires ou à commande adaptée) par rapport aux états passés d'un processus aléatoire à commande bouclée. Là encore le représentant obtenu ne dépend des fonctions de commande qu'au travers des valeurs prises par la commande. Cette propriété nous suggère de définir les notions d'espérance et de probabilité conditionnelles « universelles » relativement aux états passés d'un processus aléatoire à commande, utilisables quelles que soient les fonctions de commande choisies, qu'elles ne font intervenir que par les valeurs des commandes. La propriété, pour un processus aléatoire à commande, d'être « markovien » se définit alors de façon tout à fait naturelle : est markovien un processus pour lequel l'état admet une probabilité conditionnelle universelle relativement aux états passés, ne dépendant que de la commande actuelle et de l'état immédiatement antérieur.

Au chapitre 3, nous étudions le problème de la construction d'un processus aléatoire à commande dont les états admettent une suite donnée de probabilités de transition pour probabilités conditionnelles universelles relativement aux états passés. Ce problème se pose à propos de certains systèmes, comme les chaînes de Markov discrètes à commande, qui sont définis de cette manière. La technique que nous utilisons ne permet de le résoudre que dans le cas particulier d'un espace de commande fini ou dénombrable. Dans le cas d'un espace de commande plus général, il faudrait probablement recourir à des hypothèses supplémentaires assez fortes, de nature à assurer la mesurabilité du processus que l'on construit par rapport aux variables de commande.

Au chapitre 4 nous donnons une méthode de construction effective, moyennant des hypothèses assez strictes, mais souvent vérifiées en pratique, pour une suite régulière de probabilités conditionnelles associée à un processus aléatoire à commande. Cette méthode utilise, dans une version avec changement de variable, la formule de Bayes, qui permet de calculer des probabilités conditionnelles lorsque les lois sont absolument continues par rapport à une mesure de référence. Dans le cas d'un processus d'état et d'un processus d'observation définis par une équation d'évolution et une équation d'observation avec bruits « blancs », les calculs se simplifient et on retrouve des résultats connus.

Au chapitre 5 nous exposons, à l'aide des notions définies au chapitre 2, la méthode d'optimisation de la programmation dynamique. L'application au cas stochastique de cette méthode, très employée en temps discret, comporte certaines difficultés mathématiques, notamment l'existence de probabilités conditionnelles universelles, qui avaient été le plus souvent négligées jusqu'ici. Nous étudions en premier lieu les problèmes d'optimisation ordinaires à coût positif (et plus généralement quasi-intégrable). Les conditions suffisantes d'optimalité obtenues sont ensuite étendues aux jeux stochastiques à temps discret pour lesquels les deux joueurs disposent de la même observation (éventuellement erronée), successivement dans le cas d'un coût positif, puis dans le cas d'un coût réel quelconque, non nécessairement quasi-intégrable. Enfin nous examinons le cas particulier des « systèmes markoviens » où le coût est fonction d'un état markovien exactement observé.

Au chapitre 6 nous illustrons, sur deux exemples très classiques, la théorie des chapitres précédents. Nous retrouvons ainsi, en les améliorant parfois, des résultats déjà obtenus par des méthodes plus directes mais aussi beaucoup moins générales. Le premier exemple est celui des systèmes linéaires gaussiens à coût quadratique. En lui appliquant les résultats du chapitre 4, on retrouve le célèbre « filtre » de Kalman, qui sert à calculer l'espérance et la covariance conditionnelles de l'état par rapport aux observations antérieures. En lui appliquant les résultats du chapitre 5, on retrouve le « théorème de séparation », maintenant bien connu dans le cas d'un seul joueur, peut-être moins dans le cas de deux joueurs avec observation commune : formellement la commande optimale stochastique s'obtient à partir de la commande optimale déterministe, en y remplaçant l'état par son espérance conditionnelle par rapport aux observations passées ; il y a donc « séparation » ou « découplage » entre le problème de filtrage et le problème d'optimisation. Le deuxième exemple est celui des chaînes de Markov à commande discrètes. La présentation habituelle, basée jusqu'ici sur des considérations intuitives, trouve, grâce aux résultats du chapitre 3, une intéressante interprétation. Il est classique d'appliquer la méthode de la programmation dynamique dans cet exemple, mais les résultats du chapitre 5 assurent que la commande ainsi construite est optimale parmi toutes les commandes fonctions des états passés, et non plus seulement fonctions du dernier état connu.

Enfin une annexe rassemble les définitions et résultats classiques de théorie des probabilités le plus couramment employés dans notre exposé.



ABSTRACT

The interdependence between the various random processes (state, observation, control, cost) intervening in a controlled stochastic system is of a complex nature : the cost is a function of state, control and, sometimes, of observation ; observation is a function of state and, sometimes, of control : the evolution of the state depends on the control ; lastly, the control is chosen at any moment according to past observations.

This paper aims at analyzing, in discrete time, the influence of the choice of the control on the probabilistic properties of state, observation and cost, by using the very general mathematical model of 'random processes with control', and at examining certain applications of the results obtained to stochastic optimization.

In chapter 1 we first take the simplified case of the non-evolutive system. We define the notion of 'random variable with control' whose value depends, as a measurable function, on both a trial (i.e. on the element of a probability space) and a parameter called control. Let us consider a random variable, called observation ; we may construct, from a random variable with control, an ordinary random variable, if we take the control as a measurable function of observation. The new random variable, obtained in this way, called 'with control adapted to observation', obviously depends on the control law chosen. We then state a theorem of existence for the 'generalized' regular conditional probabilities, which extends a known result on the regular conditional probabilities. These conditional probabilities permit to calculate, for any positive random variable, a representative of the conditional expectation, relative to observation and to the random variable with control adapted to this observation, which depends on the control function chosen only through the value taken by the control. The existence of such a representative is often more or less implicitly considered as acquired, but is exceptionally proven, and, to our knowledge, never with such broad assumption (in particular, no assumption of stochastic independence).

In chapter 2 we extend these definitions and these results to evolutive, discrete time systems. We define the concept of 'random process with control' whose value at a given time depends in a measurable way on the trial and on the previous controls. Taking, at each moment, the control as a measurable function of the past states of the process, one obtains an ordinary random process, called a process with 'feedback' control. By taking the control as a measurable function of the past states of another random process with feedback control, one obtains also an ordinary random process, then called a random process with 'adapted' control (to this second process). In general, the observation process is of the type 'with feedback control', the state and cost processes are of type 'with control adapted' to the observation process (which may be identical to the state process, in the case of 'exact observation'). We state a theorem of existence for a 'regular sequence' of conditional probabilities, which permits to calculate at any moment representatives of conditional expectations of random variables (ordinary or with adapted control) relative to past states of a random process with feedback control. There again the representative obtained depends on the control function only through the values taken by the control. This property suggests to define the concepts of 'universal' conditional expectation and probability relative to past states of a random process with control, usable whatever the control functions chosen, which are made to intervene only through the control values. The property for a random process with control, to be 'Markovian' is then defined in quite a natural way : is Markovian a process for which the state admits an universal conditional probability relative to past states, depending only on the present control and on the immediately past state.

In chapter 3 we study the problem of the construction of a random process with control whose states admit a given sequence of transition probabilities as universal conditional probabilities relative to past states. This problem is raised in some systems, such as discrete Markov chains with control, which are defined in this manner. The technique we use permits to solve it only in the particular case of a finite or countable control space. In the case of a more general control space, it would probably be necessary to resort to rather strong complementary assumptions, able to ensure the measurability of the process being constructed, relative to control variables.

In chapter 4 we give an effective construction method, subject to assumptions rather strict, but in fact often verified in practice, of a regular sequence of conditional probabilities associated to a random process with control. This method makes use, in a variant with a change of variable, of the Bayes formula, which permits to calculate conditional probabilities when the laws are absolutely continuous relative to a reference measure. In the case of a state process, or of an observation process, defined by an evolution equation and by an observation equation with 'white' noise, calculations get simpler and we fall back on known results.

In chapter 5 we describe, thanks to the concepts defined in chapter 2, the optimization method of dynamic programming. The application to the stochastic case of this method, commonly used in discrete time, brings forth some mathematical difficulties, in particular the existence of universal conditional probabilities, which had been often neglected up till now. First we study the problems of ordinary optimization with positive cost (and more generally quasi-integrable). The sufficient conditions of optimality are then extended to stochastic games in discrete time, for which both players have at their disposal the same observation (possibly erroneous), successively in the case of a positive cost, then in the case of any real cost, not necessarily quasi-integrable. Lastly we examine the particular case of 'Markovian systems', where cost is a function of a Markovian state exactly observed.

In chapter 6 we illustrate, on two very classical examples, the theory developed in previous chapters. In this manner we find anew, sometimes improving them, results already obtained by methods more direct, but also much less general. The first example is that of linear, Gaussian systems with quadratic cost. By applying results of chapter 4, we find again the well-known Kalman 'filter', which is used to calculate the conditional expectation and covariance of the state relative to previous observations. By applying results of chapter 5, we find anew the 'separation theorem', now well known in the case of a single player, but may be less in the case of two players with a common observation : formally the stochastic optimal control is obtained from the deterministic optimal control, by replacing the state by its conditional expectation relative to past observations ; thus there is 'separation', or 'uncoupling', between the filtering problem and the optimization problem. The second example is that of discrete Markov chains with control. The usual presentation, based up till now on intuitive considerations, finds, thanks to the results of chapter 3, an interesting interpretation. It is commonplace to apply the dynamic programming method in this example, but results of chapter 5 make sure that the control constructed in this manner is optimal among the controls function of past states, and no more only function of the last known state.

Lastly, an appendix presents together the classical definitions and results of the Probability Theory most commonly used in this paper.



UNIVERSITE de PARIS VI
11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : DOCTORAT ES SCIENCES

THESE DE : MATHEMATIQUES

NOM : Monsieur AUMASSON

Prénoms : Claude

né le 30/12. 19.45. à PARIS Dép^t : SEINE

1ère THESE : Processus aléatoires à commande et applications à l'optimi-
sation stochastique.

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : Formule de chernoff et applications
à la perturbation des semi-groupes.

PRESIDENT : M. NEVEU

Examineurs : M. PALLU DE LA BARRIERE
M. BARDOS

Membre invité : M. DACUNHA CASTELLE

Vu et Approuvé

PARIS, le 16 mai 1972

Le Président

de l'Université de PARIS VI



